# 1.1 Reálná funkce jedné reálné proměnné

1.1.1 Rozhodněte, zda je funkcí relace: $f_1 = \{(x,y) \in R \times R;\ |y-1| + x = 0\}$
*Řešení:*

*např.* $x = -2 \Rightarrow y = -1 \wedge y = 3$ tedy relace není funkcí.

1.1.2 Rozhodněte, zda je funkcí relace: $f_2 = \{(x,y) \in R \times R;\ |x| + |y| = 1, y \geq 0\}$
*Řešení:*

$y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$, tedy $\begin{matrix} |y| = 1 - |x| \\ y = 1 - |x| \end{matrix}$, relace je funkcí.

1.1.3 Rozhodněte, zda je funkcí relace: $f_3 = \{(x,y) \in R \times R;\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0\}$
*Řešení:*

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \text{ relace je funkcí.}$$
$$(x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \textit{vyhovuje pouze bod } [0{,}0]$$

1.1.4 Rozhodněte, zda jsou si rovny funkce *f, g, h:*

$$f: y = \frac{1}{x^2 + x}\ ,\quad g: y = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^2}}\ ,\quad h: y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

*Řešení:*

$$f: y = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x+1)}\ ,\quad D(f) = R - \{0,-1\}$$
$$g: y = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^2}}\ ,\quad D(g) = R - \{0\} \qquad \Rightarrow \underline{f = h \wedge f \neq g \wedge g \neq h}$$
$$h: y = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+x)} \qquad D(h) = R - \{0,-1\}$$

1.1.5 Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá: $y = 4x^4 - x^2 + 5$
*Řešení:*

$$f(x) = 4x^4 - x^2 + 5\ ,\ f(-x) = 4(-x)^4 - (-x)^2 + 5 = 4x^4 - x^2 + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow \underline{\textit{fce je sudá}}$$

1.1.6 Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá: $y = tgx + 2\sin x$
*Řešení:*

$$f(x) = tgx + 2\sin x\ ,\ f(-x) = tg(-x) + 2\sin(-x) = -tgx - 2\sin x = -(tgx + \sin 2x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow \underline{\textit{fce je lichá}}$$

1.1.7 Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá: $y = |x-1|$

Řešení:

$f(x) = |x-1|$, $f(-x) = |-x-1| \Rightarrow$ $f$ *ce není ani sudá ani lichá*

1.1.8 Rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá: $y = |x| - 1$

Řešení:

$f(x) = |x| - 1$, $f(-x) = |-x| - 1 = |x| - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ *fce je sudá*

1.1.9 Zjistěte, zda je funkce periodická, popřípadě určete periodu: $y = \sin\frac{\pi x}{3} + \cos\frac{\pi x}{4}$

Řešení:

*perioda fcí* $\sin x, \cos x = 2\pi$

$\frac{\pi p_1}{3} = 2\pi \quad \frac{\pi p_2}{4} = 2\pi$

$p_1 = 6 \qquad p_2 = 8$

funkce je periodická s periodou $p$

$p = n(p_1, p_2) = n(6,8) = 24$

1.1.10 Zjistěte, zda je funkce periodická, popřípadě určete periodu: $y = |\sin x|$

Řešení:

Funkce je periodická s periodou $p = \pi$

1.1.11 Zjistěte, zda je funkce periodická, popřípadě určete periodu: $y = \sin x^2$

Řešení:

Funkce není periodická.

1.1.12 Zjistěte, zda je funkce periodická, popřípadě určete periodu: $y = 2tg\frac{x}{2} - 3tg\frac{x}{3}$

Řešení:

*perioda fce* $tgx = \pi$

$p_1 = 2\pi \quad p_2 = 3\pi$

funkce je periodická s periodou $p$

$p = n(p_1, p_2) = n(2\pi, 3\pi) = 6\pi$

1.1.13 Dokažte, že funkce $y = \frac{2x}{x+1}$ je na intervalu $(-1, \infty)$ rostoucí.

Řešení:

Předpokládejme, že $x_1 \langle x_2$ , $x_{1,2} \in (-1, +\infty)$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2x_2}{x_2+1}-\frac{2x_1}{x_1+1}=\frac{2x_2(x_1+1)-2x_1(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}\rangle 0$$

1.1.14 Rozhodněte, zda je funkce omezená či nikoli: $y=-2x^2+7x+4$ , $x\in R$

*Řešení:*

Grafem této funkce je parabola otevřená směrem dolů => funkce je shora omezená.

1.1.15 Rozhodněte, zda je funkce omezená či nikoli: $y=x^2-3x+4$ , $x\in\langle -2,2\rangle$

*Řešení:*

Grafem této funkce je parabola otevřená nahoru v intervalu $\langle -2,2\rangle$ => funkce je omezená.

1.1.16 Rozhodněte, zda je funkce omezená či nikoli: $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in R$

*Řešení:*

$-1\le\frac{x^2-1}{x^2+1}\le 1$ => funkce je omezená.

1.1.17 Dokažte, že k dané funkci existuje funkce inverzní a najděte ji:

$y=x^2-1$ , $x\in\langle 2,5\rangle$

*Řešení:*

Funkce je prostá na intervalu $\langle 2,5\rangle$ , $x=y^2-1\Rightarrow$ $\underline{f^{-1}:y=\sqrt{x+1}}$

1.1.18 Dokažte, že k dané funkci existuje funkce inverzní a najděte ji:

$y=\frac{2x}{x+3}$ ,$x\in R-\{-3\}$

*Řešení:*

$\frac{2x}{x+3}=\frac{2(x+3)-6}{x+3}=2-\frac{6}{x+3}$ $\Rightarrow$ lomená funkce se středem v bodě $[-3,2]$, je prostá

$x=\frac{2y}{y+3}$

$x(y+3)=2y$

$xy+3x=2y$

$y(x-2)=-3x$

$\underline{f^{-1}:y=\frac{-3x}{x-2}}$

1.1.19 Dokažte, že k dané funkci existuje funkce inverzní a najděte ji:

$y=-x^2+10x-27$ , $x\in(-\infty,5\rangle$

*Řešení:*

$y=-x^2+10x-27$

$y=-(x-5)^2-2$

$V[5,-2]$.........$x\in(-\infty,5\rangle\Rightarrow$ *funkce je prostá*

$-(x+2)=(y-5)^2$

$|y-5|=\sqrt{-(x+2)}$

$5-y=-\sqrt{-(x+2)}$

$\underline{f^{-1}: y=-\sqrt{-(x+2)}+5}$

1.1.20 Dokažte, že k dané funkci existuje funkce inverzní a najděte ji:

$y=-x^2+10x-27$ , $x \in (5,+\infty\rangle$

*Řešení:*

$y=-x^2+10x-27$

$y=-(x-5)^2-2$

$V[5,-2]$.........$x \in (5,+\infty\rangle \Rightarrow$ *funkce je prostá*

$-(x+2)=(y-5)^2$

$|y-5|=\sqrt{-(x+2)}$

$y-5=\sqrt{-(x+2)}$

$\underline{f^{-1}: y=\sqrt{-(x+2)}+5}$