1.2 Limita funkce

1.2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

Řešení:

Zde je situace velmi jednoduchá. Racionální funkce $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ je definována na okolí bodu O o poloměru $\dfrac{1}{2}$ a je v bodě O spojitá. (Připomeňme, že racionální funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém je definována). Platí tedy: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{0^2-1}{2\cdot 0^2-0-1}=1$.

1.2.2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

Řešení:

Limitovaná funkce je zde úplně stejná jako v předchozím příkladě, ale přesto je zde situace zcela odlišná. Neboť limitu nyní počítáme v bodě a = 1. V tomto bodě ovšem racionální funkce $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ není vůbec definována. Právě toto bude pro nás zcela obvyklá situace. Na štěstí ale číslo 1 je nejen kořenem polynomu ve jmenovateli, ale rovněž kořenem polynomu v čitateli. V uvažovaném výrazu bude tedy možno krátit. Dostáváme:

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

Funkce $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2-x-1}$ je definována na redukovaném okolí bodu a = 1 o poloměru (např.) 1. Funkce $g(x)=\dfrac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ je definována na okolí (nikoli redukovaném) bodu a = 1 a je v bodě a = 1 spojitá. Platí tedy: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1+1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$

1.2.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

Řešení:

Zde je nula kořenem jak polynomu v čitatel, tak i polynomu ve jmenovateli. Polynom v čitateli je zřejmě potřeba nejprve upravit:

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)-1 = 6x^3+11x^2+6x$$

Tedy

$$\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = 6x^3+11x+6$$

Odtud

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = 6\cdot 0^2+11\cdot 0+6 = 6$$

$$f(x)=\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x},\ g(x)=6x^2+11x+6$$

1.2.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^5)-(1+5x)}{x^2+x^5}$

Řešení:

Zde

$$(1+x)^5-(1+5x)=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5-1-5x=x^5+5x^4+10x^3+10x^2$$

$$\frac{(1+x^5)-(1+5x)}{x^2+x^5}=\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}$$

Potom

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^5)-(1+5x)}{x^2+x^5}=\frac{0^3+5\cdot 0^2+10\cdot 0+10}{1+0^3}=10$$

Povšimněme si ještě, že při úpravě výrazu $(1+x^5)-(1+5x)$ jsme koeficienty u třetí až páté mocniny proměnné x vůbec nemuseli počítat. Stačilo si uvědomit, že po vydělení x^2 se z nich stanou první až třetí mocniny, které stejně dají nulu po dosazení $x = 0$. Často si tak můžeme zjednodušit počítání a ušetřit čas.

1.2.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

Řešení:

Na tomto příkladě bychom se měli naučit nehledat zbytečně složitosti tam, kde nejsou. Číslo 2 je sice kořenem polynomu v čitateli, ale není kořenem polynomu ve jmenovateli! Racionální funkce $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ je tedy spojitá v bodě 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-8\cdot 2+15}=0\,.$$

1.2.6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

__Řešení__

Zde je číslo 1 kořenem jak polynomu v čitateli, tak i polynomu ve jmenovateli. Jak je známo z algebry, musí v tomto případě polynom $x-1$ dělit polynom x^3-3x+2 . Dostáváme

$$
\begin{array}{l}
(x^3-3x+2):(x-1)=x^2+x-2 \\
\underline{-x^3+x^2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
x^2-3x+2 \\
\underline{-x^2+x\quad} \\
-2x+2 \\
\underline{2x-2\quad} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

a tedy $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$. Podobně najdeme $x^4-4x+3=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$. Odtud

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}\,.$$

Vidíme ovšem ihned, že číslo 1 je kořenem jak polynomu x^2+x-2 v čitateli, tak i polynomu x^3+x^2+x-3 ve jmenovateli. Dělení polynomem $x-1$ musíme tedy opakovat. Oba polynomy jsou ovšem natolik jednoduché, že se je můžeme pokusit rozložit přímo:

$$x^2+x-2=(x^2-1)+(x-1)=(x-1)[(x+1)+1]=(x-1)(x+2)$$

$$x^3+x^2+x-3=(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)=(x-1)[(x^2+x+1+(x+1)+1)]=(x-1)(x^2+2x+3)$$

Tedy $\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}$

Podle $\underline{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\dfrac{1+2}{1^2+2\cdot 1+3}=\dfrac{1}{2}}$

klademe

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}\qquad g(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

1.2.7 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

Řešení:
Číslo 1 je zde kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Protože oba polynomy jsou jednoduché, nebudeme je dělit $x-1$, ale zkusíme je rozložit přímo. (dělení bývá sice někdy delší, ale zato má tu výhodu, že se jedná o úkon zcela mechanický).

$$x^4-3x+2=\left(x^4-x\right)+\left(-2x+2\right)=x\left(x^3-1\right)-2(x-1)=(x-1)\left[x\left(x^2+x+1\right)-2\right]=$$
$$=(x-1)\left(x^3+x^2+x-2\right)$$

$$x^5-4x+3=\left(x^5-x\right)+\left(-3x+3\right)=x\left(x^4-1\right)-3(x-1)=(x-1)\left[x\left(x^3+x^2+x+1\right)-3\right]=$$
$$=(x-1)\left(x^4+x^3+x-3\right)$$

$$\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3}$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}=\dfrac{1^3+1^2+1-2}{1^4+1^3+1^2+1-3}=1$.

1.2.8 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

Řešení:
Číslo 2 je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Oba polynomy jsou poměrně jednoduché a proto se opět pokusíme o přímý rozklad, čímž se vyhneme dělení polynomem $x-2$.

$$x^3-2x^2-4x+8=x^2(x-2)-4(x-2)=(x-2)\left(x^2-4\right)=(x-2)^2(x+2)$$

$$x^4-8x^2+16=\left(x^2-4\right)=(x-2)^2(x+2)^2$$

$$\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

1.2.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

Řešení:
(zde se jedná o limitu v bodě –1. Limitě v bodě 1 zleva by se zapsala). Číslo –1 je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Pokusíme se o rozklad:

$$x^3-2x-1=\left(x^3-x\right)+\left(-x-1\right)=x\left(x^2-1\right)-\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left[x\left(x-1\right)-1\right]=\left(x+1\right)\left(x^2-x-1\right)$$
$$x^5-2x-1=\left(x^5-x\right)+\left(-x-1\right)=x\left(x^4-1\right)-\left(x+1\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x+1\right)=$$
$$=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left[x\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)-1\right]=\left(x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x-1\right)$$

$$\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\frac{x\left(x-1\right)-1}{x\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)-1}=\frac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}$$

Tedy $\underline{\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\frac{\left(-1\right)\cdot\left(-2\right)-1}{\left(-1\right)\cdot\left(-2\right)\cdot 2-1}=\frac{1}{3}}$.

Všimněte si, že číslo -1 jsme dosazovali do předposledního, ještě neroznásobeného výrazu. V některých případech to bývá jednodušší než dosazování do výsledného roznásobeného výrazu.

1.2.10 $\lim\limits_{x\to 2}=\frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$

Řešení:
Číslo 2 je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli

$$x^2-x-2=\left(x-2\right)\left(x+1\right)$$
$$x^3-12x+16=\left(x^3-4x\right)+\left(-8x+16\right)=x\left(x^2-4\right)-8\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left[x\left(x+2\right)-8\right]=$$
$$=\left(x-2\right)\left(x^2+2x-8\right)=\left(x-2\right)\left(x-2\right)\left(x+4\right)=\left(x-2\right)^2\left(x+4\right)$$
$$\frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}=\frac{\left(x-2\right)^{20}\left(x+1\right)^{20}}{\left(x-2\right)^{20}\left(x+4\right)^{10}}=\frac{\left(x+1\right)^{20}}{\left(x+4\right)^{10}}$$

Tedy $\underline{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}=\frac{\left(2+1\right)^{20}}{\left(2+4\right)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\frac{3^{20}}{2^{10}\cdot 3^{10}}=\frac{3^{10}}{2^{10}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}$.

1.2.11 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$

Řešení:
Limita zde trochu připomíná limitu posloupnosti, ale nedejme se zmýlit, n je zde pevné přirozené číslo. Číslo 1 je zde kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Z polynomu v čitateli zřejmě potřebujeme vytknout $x-1$. Postupujeme následujícím způsobem:

$$x+x^2+...+x^n-n=\left(x-1\right)+\left(x^2-1\right)+...+\left(x^n-1\right)=\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)+...+\left(x-1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)=\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+...+\left(n-1\right)x+n\right)$$
$$\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}=x^{n-1}+2x^{n-2}+...+\left(n-1\right)x+n$$

dostáváme

$$\underline{\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}=1^{n-1}+2\cdot 1^{n-2}+\ldots+(n-1)\cdot 1+n=1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.}$$

1.2.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

Řešení:
Zde se snadno přesvědčíme, že číslo 1 je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli. Asi nás zarazí vysoký stupeň obou polynomů a nebudeme mít chuť žádný z nich dělit polynomem $x-1$ (přestože i toto je velmi jednoduché). Snadno ale oba polynomy rozložíme:

$$x^{100}-2x+1=\left(x^{100}-x\right)+(-x+1)=x\left(x^{99}-1\right)-(x-1)=(x-1)\left[x\left(x^{98}+x^{97}+\ldots+x+1\right)-1\right]=$$
$$(x-1)\left(x^{99}+x^{98}+\ldots+x^2+x-1\right).$$
$$x^{50}-2x+1=\left(x^{50}-x\right)+(-x+1)=x\left(x^{49}-1\right)-(x-1)=(x-1)\left[x\left(x^{48}+x^{47}+\ldots+x+1\right)-1\right]=$$
$$=(x-1)\left(x^{49}+x^{48}+\ldots+x^2+x-1\right)$$
$$\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\frac{x^{99}+x^{98}+\ldots+x^2+x-1}{x^{49}+x^{48}+\ldots+x^2+x-1}$$

Tedy

$$\underline{\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\frac{99-1}{49-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}}$$

1.2.13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, m a n jsou přirozená.

Řešení:
Pro nás je toto již zcela standardní úloha:

$$x^m-1=(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1\right)$$
$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)$$

$$\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}$$

Tedy

$$\underline{\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{1^{m-1}+1^{m-2}+\ldots+1+1}{1^{n-1}+1^{n-2}+\ldots+1+1}=\frac{m}{n}}$$

1.2.14 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, n je přirozené, a je konstanta.

Řešení:
Zde číslo a je kořenem polynomu v čitateli i ve jmenovateli. Pokusme se tedy rozložit polynom v čitateli. Musíme zřejmě začít tím, že rozložíme x^n-a^n a potom z obou sčítanců vytkneme $x-a$. Potom ovšem se musíme snažit vytknout $x-a$ ještě jednou, abychom mohli krátit proti jmenovateli.

$$\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)-na^{n-1}(x-a)=$$
$$(x-a)\left[x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}-na^{n-1}\right]=(x-a)\left[\left(x^{n-1}-a^{n-1}\right)+a\left(x^{n-2}-a^{n-2}\right)+\ldots+a^{n-2}(x-a)\right]=$$
$$(x-a)^2\left[\left(x^{n-2}+x^{n-3}a+\ldots+a^{n-2}\right)+a\left(x^{n-3}+x^{n-4}a+\ldots+a^{n-3}\right)+\ldots\ldots+a^{n-3}(x+a)+a^{n-2}\right].$$

Odtud dostáváme

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+\ldots+2a^{n-2}+a^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}an-2.$$