1.2 Limita funkce

1.2.29 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Řešení:

$$\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \frac{\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2\right]}{\left(x^3+8\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2\right]} = \frac{x-6+2^3}{\left(x^3+8\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left(x^2-2x+4\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2\right]}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{\left(x^2-2x+4\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x-6} + 2^2\right]} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{12\cdot 12} = \frac{1}{144}$$

1.2.30 $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - 2^2} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\right)} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}$$

1.2.31 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, $n \in N$.

Řešení:

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1-i}\right)}{x\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1-i}\right)} = \frac{1+x-1}{x\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1-i}\right)} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1-i}}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1-i}} = \frac{1}{n}$$

1.2.32 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

Řešení:

$$\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}=\frac{\left[\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)\right]\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)}=\frac{1-2x-x^2-(1+x)^2}{x\left(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)\right)}=$$

$$=\frac{-2x-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}=-2$$

1.2.33 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

Řešení:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\right)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right]}{\left(x+x^2\right)\left[\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\right)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right]}=$$

$$\frac{3x-x^2}{x(1+x)\left[\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\right)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right]}=\frac{3-x}{(1+x)\left[\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\right)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right]}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3-x}{(1+x)\left[\left(\sqrt[3]{8+3x-x^2}\right)^2+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4\right]}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

1.2.34 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

Řešení:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}\right)+\left(\sqrt[3]{27-x}\right)^2\right]}{\left(x+2\sqrt[3]{x^4}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}\right)+\left(\sqrt[3]{27-x}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{27+x-27+x}{x\left(1+2\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}\right)+\left(\sqrt[3]{27-x}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{2}{\left(1+2\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}\right)+\left(\sqrt[3]{27-x}\right)^2\right]}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(1+2\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{27+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{27+x}\cdot\sqrt[3]{27-x}\right)+\left(\sqrt[3]{27-x}\right)^2\right]}=\frac{2}{27}$$

1.2.35 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

Řešení:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\frac{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^3-\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^3}{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2-\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^2}=\frac{\left[\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}\right]\left[\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2+\sqrt[6]{1+x}\sqrt[6]{1-x}+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^2\right]}{\left[\sqrt[6]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}\right]\left[\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}\right]}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2+\sqrt[6]{1+x}\sqrt[6]{1-x}+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^2}{\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2+\sqrt[6]{1+x}\sqrt[6]{1-x}+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^2}{\sqrt[6]{1+x}+\sqrt[6]{1-x}}=\frac{3}{2}$$

1.2.36 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

Řešení:

Odmocniny v čitateli upravíme tak, aby byly stejné, čtvrtou odmocninu ve jmenovateli necháme. Dostaneme tak:

$$\frac{\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$$

Celý zlomek nyní rozšíříme. Kvůli čitateli výrazem A(x), kvůli jmenovateli výrazem B(x).

$$A(x)=\left(\sqrt[6]{(x+2)^3}\right)^5+\left(\sqrt[6]{(x+2)^3}\right)^4\left(\sqrt[6]{(x+20)^2}\right)+\left(\sqrt[6]{(x+2)^3}\right)^3\left(\sqrt[6]{(x+20)^2}\right)^2+$$

$$+\left(\sqrt[6]{(x+2)^3}\right)^2\left(\sqrt[6]{(x+20)^2}\right)^3+\left(\sqrt[6]{(x+2)^3}\right)\left(\sqrt[6]{(x+20)^2}\right)^4+\left(\sqrt[6]{(x+20)^2}\right)^5$$

$$B(x)=\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^2+4\sqrt[4]{x+9}+8$$

Potom dostáváme:

$$\frac{\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\frac{\left[(x+2)^3-(x+20)^2\right]B(x)}{[x+9-16]A(x)}=\frac{\left[x^3+5x^2-28x-392\right]B(x)}{(x-7)A(x)}=$$

$$=\frac{(x-7)\left(x^2+12x+56\right)B(x)}{(x-7)A(x)}=\frac{\left(x^2+12x+56\right)B(x)}{A(x)}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(x^2+12x+56\right)B(x)}{A(x)}=\frac{\left(7^2+12\cdot 7+56\right)B(7)}{A(7)}=\frac{189\cdot 32}{6\cdot 3^5}=\frac{112}{27}$$

1.2.37 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1\right)+\left(1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

Jedná se o známou metody přičtení a odečtení téhož. Tento postup je oprávněný, pokud obě poslední limity existují a jsou vlastní. Tyto ovšem musíme počítat standardním způsobem:

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{x}{3}-1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\left(1-1+\frac{x}{2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right]}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1}$$

Odtud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

Druhou limitu lze počítat stejně, ale ukážeme, že to jde i trochu jinak:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}}{\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}}$$

Postupně určíme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+\frac{x}{4}\right)}{x\left[1+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}}{1+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}\right)^3}=-\frac{1}{16}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{1}{4}$$

Odtud potom dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{-\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}$$

Celkem tedy dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$$

1.2.38 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, $m,n\in N$

Řešení:

Použijeme postup z předchozího příkladu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)+\left(1-\sqrt[n]{1+\beta x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

Napišme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}$$

Tuto limitu počítejme užitím věty o limitě složené funkce. Vnitřní funkce buď $g(x)=\alpha x$ a vnější funkce buď $f(y)=\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}$

$\lim_{x\to 0}\alpha x=0$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{m}$ (*viz příklad* 3)

Pro složenou funkci $f(g(x))=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}$ tedy platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{m}$$

Odtud:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}$$

Druhá limita je ovšem až na znaménko úplně stejná, dostáváme tedy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=-\frac{\beta}{n}$$

Celkem tedy dostáváme:

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}}$$

1.2.39 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in N$

Řešení:

Lze psát $\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}=\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^n+(1+\beta x)^m}$ a poté postupovat obvyklým způsobem. Ukážeme ještě jiný postup. Spočívá opět ve vhodném přičtení a odečtení, přitom při výpočtu použijeme výsledků z předchozího příkladu a spojitosti funkce $\sqrt[m]{1+\alpha x}$ v bodě 0:

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}\right)+\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}\right)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)+\frac{\alpha}{m}=$$

$$=1\cdot\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}=\underline{\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}}$$

1.2.40 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m,n\in N$.

Řešení:

Lze opět postupovat obvyklým způsobem, zde však lze úspěšně použít znalosti z příkladu 10:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}=\frac{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}}{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}}$$

Na výpočet těchto limit použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkce bude $f(x)=x-1$ a vnější funkce bude $g(y)=\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}$, dostaneme tedy:

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{m}$, takže pro složenou funkci $f(g(x))=\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}$ platí:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{m}$$

Dostáváme tedy ihned výsledek:

$$\underline{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{m}}$$

1.2.41 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$

Řešení:
Vyjadřovat tuto limitu jako rozdíl limit by bylo chybné, protože limity zlomků v závorce neexistují. Nezbývá nám tedy než oba zlomky odečíst. Dostaneme:

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)-2\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}=\frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}$$

Nyní nás však nemusí napadnout žádný vhodný postup, proto v duchu celé řady předchozích příkladů nejprve oba zlomky upravíme obvyklým způsobem a teprve poté odečteme:

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x}-\frac{2\left[1+\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{1-x}=\frac{1+3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{1-x}$$

Poslední zlomek lze přepsat ve tvaru:

$$\frac{1+3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{1-x}=\frac{\left(-3+3\sqrt{x}\right)+\left(2-2\sqrt[3]{x}\right)+\left(2-2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}{1-x}$$

Na základě tohoto vyjádření lze psát:

$$\underline{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(-3+3\sqrt{x}\right)}{1-x}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-2\sqrt[3]{x}\right)}{1-x}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}{1-x}=$$

$$=-3\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+2\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+2\lim_{x\to 1}\frac{\left[\sqrt[3]{x}\right]^2-1}{x-1}=-3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+2\lim_{x\to 1}\left[\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right]=$$

$$=-\frac{5}{6}+2\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=-\frac{5}{6}+2\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{1}{2}}$$

1.2.42 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$.

Řešení:
Je třeba si uvědomit, že tuto limitu lze vyjádřit jako součin limit:

$$\underline{\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}=\underline{\frac{1}{n!}}$$

1.2.43 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$, $a,b\in R$

Řešení:
Třebaže zde funkce nemá tvar zlomku, lze zlomek z ní udělat. Pak už postupujeme standardním způsobem:

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}-x=\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}{1}=\frac{\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right]}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$=\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

Odtud:

$$\underline{\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}=\underline{\frac{a+b}{2}}$$

1.2.44 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

Řešení:

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty} x\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)-2\sqrt{x^2+x}\right]}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)^2-4\left(x^2+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)+2\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}\cdot\left(x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}+x^2-4x^2-4x\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}2x\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)=$$

$$=\frac{2}{4}\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}-(x+1)}{1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{-\frac{1}{4}}$$

Povšimněte si, že v tomto příkladě se naše osvědčená metoda použila dokonce dvakrát. Lze ale předvést ještě jeden způsob výpočtu této limity, který rovněž bude používat dvakrát naši metodu, ale jeho technika je přece jen trochu jiná:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)+\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x^2+2x-x^2-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}+\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}-\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}\right]=\lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{x+\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\leftarrow+\infty}\frac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\frac{1}{4}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}$$

1.2.45 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

Řešení:

Obvyklým způsobem dostaneme:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3+x^2+1\right)-\left(x^3-x^2+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2}=\underline{\frac{2}{3}}$$

I u tohoto příkladu však lze použít i jiný postup výpočtu, který je založen na vhodném přičtení a odečtení:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$$

Dále dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

Podobně:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=\frac{1}{3}$$

Celkem tedy dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

1.2.46 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Řešení:

Zde je možno limitovanou funkci přepsat ve tvaru $\sqrt[6]{\left(x^3+3x^2\right)^2}-\sqrt[6]{\left(x^2-2x\right)^3}$ a použít standardní metodu. Výpočet tímto způsobem je však poněkud zdlouhavý.
Pohodlnější je použít způsob, se kterým jsme se seznámili v předchozím příkladě:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+$$
$$+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$$

postupně určíme obě tyto limity:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)^2+x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2-2x\right)}{x+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=1$$

Celkem tedy dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=1+1=1$$

1.2.47 $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}\right]$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\frac{\left(x+1\right)^2-\left(x-1\right)^2}{\left(x+1\right)^{\frac{4}{3}}+\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(x-1\right)^{\frac{4}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\left(x+1\right)^{\frac{4}{3}}+\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(x-1\right)^{\frac{4}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{4}{3}$$

1.2.48 $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)-2\sqrt{x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{x+2+2\sqrt{x+2}\sqrt{x}+x-4(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x}+x-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}=$$

$$2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{x+2}\sqrt{x}-(x+1)\right]=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to+\infty} x\frac{(x+2)x-(x+1)^2}{\sqrt{x+2}\sqrt{x}+(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x+2}\sqrt{x}+(x+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{-\frac{1}{4}}$$

Můžeme zde použít i metodu, kterou jsme již užili v příkladě 16.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

1.2.49 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)}-x\right]$ **.**

Řešení:

Zde je postup zcela jasný, problém je v tom, jak výpočet zapsat:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)}-x\right]}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)-x^n}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)}\right)^{n-1-i}\cdot x^i}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1+\ldots+a_n)x^{n-1}+polynom\ stupně\langle\ n-1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)}\right)^{n-1-i}\cdot x^i}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a_1+\ldots+a_n)+\dfrac{polynom\ stupně\langle\ n-1}{x^{n-1}}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt[n]{(1+\frac{a_1}{x})\cdot\ldots\cdot(x+\frac{a_n}{x})}\right)}=\underline{\frac{a_1+\ldots a_n}{n}}$$

1.2.50 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$, $n\in N$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

Tento postup jsme často nedoporučovali, vše záleží na tom, zda tyto dvě limity existují:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2$$

Vše je tedy v pořádku a dostáváme:

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=0^n+2^n=2^n}$$

1.2.51 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$, $n\in N$.

Řešení:

Zřejmě stačí použít rozklad typu A^n-B^n,

$$\underline{\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[2x\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1-i}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^i\right]=$$

$$=2\lim_{x\to0}\left[2x\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1-i}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^i\right]=\underline{2n}$$

neboť poslední funkce je spojitá v bodě 0.

1.2.52 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení:

Použijeme trigonometrickou formuli $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Dostáváme tedy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Nyní použijeme větu o limitě složené funkce. Vnitřní funkci vezmeme $g(x)=\frac{x}{2}$ a vnější funkci vezmeme $f(y)=\frac{\sin y}{y}$. Platí: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$, $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$

Tedy pro limitu složené funkce $f(g(x))=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

Máme tedy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

1.2.53 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Řešení:

Musíme si vytvořit ve jmenovateli 5x jako je v čitateli a poté s využitím věty o limitě složené funkce dostaneme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(5\frac{\sin 5x}{5x}\right)=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

1.2.54 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ má v bodě $+\infty$ limitu 0 a funkce $g(x)=\sin x$ je na každém okolí bodu $+\infty$ omezená, lze tedy psát:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)=0$$

1.2.55 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ x}{x}$.

Řešení:

Tam, kde se vyskytují funkce *tg x* a *cotg x*, bývá obyčejně vhodné vyjádřit je pomocí funkcí *sin x* a *cos x* :

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1}$$

1.2.56 $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot g\ 3x)$.

Řešení:

$$\underline{\lim_{x\to 0}(x\cot g\ 3x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}{\lim\limits_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3\cdot 1}=\underline{\frac{1}{3}}$$

1.2.57 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Řešení:

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x-\sin x}{\sin^3 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2}=\underline{\frac{1}{2}}$$

1.2.58 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}}-\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(5\frac{\sin 5x}{5x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}-$$

$$-\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(3\frac{\sin 3x}{3x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{5}{1}-\frac{3}{1}=\underline{2}$$

Předchozí postup je možno trochu modifikovat, např.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}\right)=1\cdot(5-3)=2$$

Nebo lze hned na počátku použít trigonometrickou formuli:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(2\cos 4x)=2$$

neboť funkce *2 cos 4x* je spojitá v bodě 0.