1.3 Derivace funkce

1.3.1 Derivujte následující funkci
y = C, C – konstanta

Řešení:
Zjistíme, že $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, potom $y' = [C]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{0}$.

1.3.2 Derivujte následující funkci
y = x

Řešení:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1,\; y' = [x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{1}\ .$$

1.3.3 Derivujte následující funkci
y = sin x

Řešení:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\cos x}\ .$$

1.3.4 Derivujte následující funkci
$y = e^x$

Řešení:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\ ,\; y' = [e^x]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Limitu vypočítáme pomocí substituce $e^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{z}$ a věty o limitě složené funkce. Vyjde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1,\; [e^x]' = \underline{e^x}.$$

1.3.5 Derivujte následující funkci
$y = x^n$, $n \ldots$ přirozené číslo.

Řešení:
Derivaci určíme na základě pravidla pro derivaci součinu:
$$y' = (x \cdot x \cdots x)' = 1 \cdot x^{n-1} + 1 \cdot x^{n-1} + \ldots 1 \cdot x^{n-1} = \underline{n \cdot x^{n-1}}.$$

1.3.6 Derivujte následující funkci
$y = \sqrt[n]{x},\ x \rangle 0\ \ n \ldots$ přirozené číslo.

<u>*Řešení:*</u>

$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, inverzní funkce k předchozí je $x = y^n$. Derivací dostáváme

$$\frac{dx}{dy} = n\, y^{n-1} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},\ \ odtud\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \underline{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}}.$$

1.3.7 Najděte derivaci $f'(x)$ funkce dané parametricky $x = \sin^2 t,\ \ y = \cos^2 t,\ \ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

<u>*Řešení:*</u>

$$\xi'(t) = \left[\sin^2 t\right]' = 2\sin t \cos t,$$

$$\eta'(t) = \left[\cos^2 t\right]' = -2\sin t \cos t,$$

$$f'(x) = \frac{\xi'(t)}{\eta'(t)} = \underline{-1}.$$

1.3.8 Stanovte největší výšku, které dosáhne těleso vržené počáteční rychlostí v_0 šikmo vzhůru pod úhlem α (odpor vzduchu zanedbáváme).

<u>*Řešení:*</u>

Parametrické rovnice popisující dráhu tělesa při šikmém vrhu jsou $y = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t$, $x = v_0\, t \cos\alpha$, kde y udává výšku a x vodorovnou vzdálenost tělesa vzhledem k počátku dráhy. Nejprve určíme směrnici tečny $\frac{dy}{dx}$ k dráze tělesa.

$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - g\, t,\ \ \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha,\ \ \frac{dy}{dy} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = tg\, \alpha - \frac{g\, t}{v_0 \cos\alpha}$. V nejvyšším bodě dráhy bude směrnice tečny $\frac{dy}{dx} = 0$ a odtud $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Dosadíme-li do vztahu pro y, zjistíme největší výšku, které těleso dosáhne rovnu $y = \underline{\frac{v_0^2 \sin\alpha}{g}}$.