# <u>1.3 Derivace funkce</u>

1.3.9 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

*<u>Řešení:</u>*

Danou funkci lze přepsat ve tvaru $f(x)=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}$. Zřejmě ji můžeme chápat jako součet tří funkcí $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, kde $f_1(x)=x^{-1}$, $f_2(x)=2x^{-2}$, $f_3(x)=3x^{-3}$. Ihned vidíme, že $D_{f_1}=D_{f_2}=D_{f_3}=D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. V každém bodě z definičního oboru má každá z těchto funkcí vlastní derivaci. Podle tabulky derivací máme:

$$f_1'(x)=\left(x^{-1}\right)'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$$

$$f_2'(x)=\left(2x^{-2}\right)'=2(x^{-2})'=2(-2)x^{-2-1}=-\frac{4}{x^3}$$

$$f_3'(x)=\left(3x^{-3}\right)'=3(x^{-3})'=3(-3)x^{-3-1}=-\frac{9}{x^4}$$

Tedy i funkce $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ má v každém bodě definičního oboru derivaci a platí: $\underline{f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}}$ .

1.3.10 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=(1-x)(1-x^2)$.

*<u>Řešení:</u>*

Danou funkci lze chápat jako součin $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, kde $f_1(x)=1-x$, $f_2(x)=1-x^2$. Zřejmě $D_{f_1}=D_{f_2}=D_f=(-\infty,+\infty)$. V každém bodě definičního oboru mají obě funkce vlastní derivace, platí tedy s použitím tabulky derivací:

$$f_1'(x)=(1-x)'=(1+(-1)x)'=(1)'+((-1)x)'=0+(-1)(x)'=(-1)\cdot 1=-1$$

$$f_2'(x)=(1-x^2)'=(1+(-1)x^2)'=(1)'+((-1)x^2)'=0+(-1)(x^2)'=(-1)\cdot 2x=-2x$$

Tedy i funkce $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ má v každém bodě definičního oboru derivaci a platí:

$$\underline{f'(x)=f_1'(x)f_2(x)+f_1(x)f_2'(x)=-1\cdot(1-x^2)+(1-x)\cdot(-2x)=-1+x^2-2x+2x=3x^2-2x-1}$$

Derivaci uvažované funkce lze vypočítat i jinak – a to tak, že funkci nejprve upravíme roznásobením: $f(x)=(1-x)(1-x^2)=x^3-x^2-x+1$ a odtud přímo dostaneme $\underline{f'(x)=3x^2-2x-1}$

1.3.11 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

*Řešení:*

Danou funkci lze především chápat jako podíl $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, kde

$f_1(x) = 1 + x - x^2$ , $f_2(x) = 1 - x + x^2$. Zřejmě $1 - x + x^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \rangle 0$ a tudíž

$D = D_{f_2} = (-\infty, +\infty)$. Máme

$f_1'(x) = (1 + x - x^2)' = 1 - 2x$

$f_2'(x) = (1 - x + x^2)' = -1 + 2x$

Protože $f_2(x) \neq 0$ na $(-\infty, +\infty)$, má funkce $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ na $(-\infty, +\infty)$ vlastní derivaci a platí:

$$f'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(x-2+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 - x + x^2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 1 + x - x^2 - 2x - 2x^2 + 2x^3}{(x-2+x^2)^2} = \frac{-4x+2}{(x-2+x^2)^2} = \underline{\frac{2(1-2x)}{(x-2+x^2)^2}}$$

1.3.12 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{e^x \sin x}{x^2 - 3x + 2}$.

*Řešení:*

Danou funkci lze především chápat jako podíl $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, kde

$f_1(x) = e^x \sin x$ , $f_2(x) = x^2 - 3x + 2$. Zřejmě $D_{f_1} = D_{f_2} = (-\infty, +\infty)$, avšak

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, a tudíž $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.Dostáváme

$f_1'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$

$f_2'(x) = 2x - 3$

Funkce $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ má v každém bodě definičního oboru vlastní derivaci a platí:

$$f'(x) = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \frac{(e^x \sin x + e^x \cos x)(x^2 - 3x + 2) - e^x \sin x (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} =$$

$$= \frac{e^x \sin x (x^2 - 5x + 5) + e^x \cos x (x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \underline{e^x \frac{(x^2 - 5x + 5) \sin x + (x^2 - 3x + 2) \cos x}{(x^2 - 3x + 2)^2}}$$

1.3.13 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

*Řešení:*

Zde musíme danou funkci chápat především jako funkci složenou, situace je zde následující:

Vnější funkce $f_1(y) = \ln y$ , $D_{f_1} = (0,+\infty)$

Vnitřní funkce $f_2(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $D_{f_2} = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

Vnitřní funkci bychom sice mohli brát s definičním oborem $(-\infty,+\infty)$, ale nemělo by to smysl, neboť funkce $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ zobrazuje interval $\langle -1,1\rangle$ do intervalu $(-\infty,0\rangle$, na kterém funkce $f_1$ není definována. Zřejmě platí: $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$, $D_f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Dostáváme:

$f_1'(y) = \dfrac{1}{y}$ *na* $D_{f_1}$

$$f_2'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \text{ na } D_{f_2}$$

Podle věty o derivaci složené funkce má funkce $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ v každém bodě definičního oboru vlastní derivaci a platí:

$$f'(x) = (f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \underline{\frac{4x}{x^4-1}}$$

Povšimněte si, že výraz $\dfrac{4x}{x^4-1}$ je definován i v těch bodech, ve kterých funkce f vůbec není definována a tudíž tam nemůže mít ani derivaci. S tímto jevem se lze setkat častěji a není třeba se s ním nikterak znepokojovat.

1.3.14 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln^3 x^2$.

*__Řešení:__*

Zde je asi nejlepší danou funkci přepsat ve tvaru $f(x) = l\left(nx^2\right)^3$. Z tohoto tvaru je vidět, že $f(x) = \left(f_1 \circ f_2 \circ f_3\right)(x)$, kde $f_1(z) = z^3$ , $f_2(y) = \ln y$ , $f_3(x) = x^2$.

Zřejmě $D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Proto funkce $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ vezmeme s definičními obory $D_{f_1} = (-\infty,+\infty)$ , $D_{f_2} = (0,+\infty)$ , $D_{f_3} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Každá z funkcí $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ má v každém bodě svého definičního oboru vlastní derivaci. Snadno vidíme,že:

$f_1'(z) = 3z^2$ , $f_2'(y) = \dfrac{1}{y}$ , $f_3'(x) = 2x$

Funkce $f(x) = \left(f_1 \circ f_2 \circ f_3\right)(x)$ má v každém bodě z definičního oboru derivaci a platí:

$$f'(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)'(x) = (f_1 \circ (f_2 \circ f_3))'(x) = f_1'((f_2 \circ f_3)(x)) \cdot (f_2 \circ f_3)'(x) =$$

$$= f_1'((f_2 \circ f_3)(x)) \cdot ((f_2' \circ f_3)'(x)) \cdot f_3'(x) = 3(\ln x^2)^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6(\ln x^2)^2}{x} = \underline{\frac{6\ln^2 x^2}{x}}$$

Vzhledem k tomu, že skládání funkcí je asociativní, mohli jsme postupovat i tímto způsobem:

$$f'(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)'(x) = ((f_1 \circ f_2) \circ f_3)'(x) = (f_1 \circ f_2)'(f_3(x)) \cdot f_3'(x) =$$

$$= f_1'((f_2 \circ f_3)(x)) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$$

což je stejný výsledek jako výše, praktický výpočet by ale vypadal takto:

$$\left(\ln^3 x^2\right) = 3\ln^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6\ln^2 x^2}{x}$$

1.3.15 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ , $D_f = (0,+\infty)$ , $a \rangle 0$ je konstanta.

*Řešení:*

V tomto příkladě chceme upozornit, jak derivovat funkci tvaru $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Základní myšlenka je stejná jako při výpočtu limit. Funkci především vyjádříme ve tvaru: $f(x) = e^{h(x)\ln g(x)}$. Zřejmě platí: $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$, kde $f_1(y) = e^y$ , $f_2(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$.
Platí, že $f_1'(y) = e^y$, takže máme:

$$f'(x) = e^{h(x)\ln g(x)} \cdot (h(x) \cdot \ln g(x))' = g(x)^{h(x)} (h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot (\ln g(x))')$$

pro výpočet derivace $(\ln g(x))'$ opět stačí použít větu o derivaci složené funkce.
Napíšeme $\ln g(x) = (g_1 \circ g_2)(x)$, kde $g_1(y) = \ln y$ , $g_2(x) = g(x)$, takže máme:

$$(\ln g(x))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Celkem tedy dostáváme: $f'(x) = g(x)^{h(x)} \left( h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$.

V našem konkrétním případě tak dostáváme:

$$\left(x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}\right)' = (e^{x^a \ln x})' + (e^{a^x \ln x})' + (e^{x^x \ln a})' = e^{x^a \ln x}(x^a \ln x) + e^{a^x \ln x}(a^x \ln x) +$$

$$+ e^{x^x \ln a}(x^x \ln a) = x^{x^a}(ax^{a-1} \ln x + x^a \cdot \frac{1}{x}) + x^{a^x}(e^{x \ln a} \ln x)' + a^{x^x}(e^{x \ln x} \ln a)' =$$

$$= x^{x^a} x^{a-1}(a \ln x + 1) + x^{a^x}(e^{x \ln a} \ln a \ln x + e^{x \ln a} \cdot \frac{1}{x}) + a^{x^x}(\ln a) e^{x \ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) =$$

$$= \underline{x^{x^a} x^{a-1}(a \ln x + 1) + x^{a^x} a^x (\ln a \ln x + \frac{1}{x}) + a^{x^x} x^x \ln a(\ln x + 1)}$$

1.3.16 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x}$ .

*Řešení:*

Zřejmě $D_f = \langle 0,+\infty)$, ale chceme-li použít formulí pro výpočet derivací, musíme se omezit na interval $(0,+\infty)$, neboť tyto formule platí pouze pro vlastní derivace a v našem případě je $(\sqrt{x})'_{x=0+} = +\infty$. Tuto skutečnost zjistíme snadno pomocí věty o limitě derivace. Funkce $\sqrt{x}$ je totiž spojitá v bodě 0 zprava, na intervalu $(0,+\infty)$ platí: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a zřejmě $\lim_{x \to 0+} (\sqrt{x})' = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. Tedy i $(\sqrt{x})'_{x=0+} = +\infty$ .

Na intervalu $(0,+\infty)$ ovšem pomocí formulí pro derivace snadno najdeme:

$$f'(x) = (\sqrt{x} - arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

Vzhledem k tomu, že $D_f = \langle 0,+\infty)$, jediná otázka týkající se derivace, která zbývá, je otázka pro $f'_+(0)$. V takovýchto případech ale velmi často pomáhá věta o limitě derivace. Funkce f(x) je spojitá v bodě 0 zprava, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} = 0$, takže $f'_+(0)$ existuje a platí:

$f'_+(0) = 0$. Celkově tedy můžeme napsat, že platí: $\underline{(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}}$ na $\langle 0,+\infty)$

1.3.17 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

*Řešení:*

Zde je opět $D_f = \langle 0,+\infty)$, ale ze stejných důvodů, jako v předešlém příkladě můžeme počítat derivace pouze na intervalu $(0,+\infty)$. Dostáváme tak:

$$\underline{f'(x) = (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Zajímá-li nás ještě $f'_+(0)$, použijeme opětně větu o limitě derivace. Funkce f(x) je spojitá v bodě 0 zprava a platí $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$, takže $f'_+(0)$ existuje a platí: $f'_+(0) = +\infty$.

1.3.18 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

*Řešení:*

Zde může být trochu nejasná otázka definičního oboru. Napíšeme-li však nerovnosti:

$$-1 \le \frac{1-x^2}{1+x^2} \le 1 \quad \Big| \cdot (1+x^2)$$

$$-1 - x^2 \le 1 - x^2 \le 1 + x^2$$

vidíme hned, že poslední nerovnosti platí pro všechna reálná x a že tedy $D_f = (-\infty,+\infty)$. Vnitřní funkce $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ má zřejmě vlastní derivaci v každém bodě z $(-\infty,+\infty)$. Bohužel však vnější funkce arcsin y má nevlastní (jednostranné) derivace v bodech –1 a 1. Při použití věty o derivaci složené funkce se tedy musíme omezit na ta x, pro která $\frac{1-x^2}{1+x^2} \ne \mp 1$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \mp 1 \quad \Big| \cdot (1+x^2)$$

$$1 - x^2 = \mp(1+x^2)$$

$$x = 0$$

Vidíme tak, že derivace funkce f(x) můžeme podle věty o derivaci složené funkce vypočíst pro všechna $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Máme:

$$f'(x)=\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=$$

$$=\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2}{2|x|}\cdot\frac{-2x\cdot 2}{(1+x^2)^2}=$$

$$=-\frac{2x}{|x|(1+x^2)}=\underline{-\frac{2sign\ x}{1+x^2}}$$

Funkce f(x) je očividně spojitá v bodě 0 (tedy je spojitá jak zleva, tak i zprava) a dále platí:

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}\left(-\frac{2sign\ x}{1+x^2}\right)=2\ ,\ \lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{2sign\ x}{1+x^2}\right)=-2$$

Podle věty o limitě derivace je tedy $f'_-(0)=2$, $f'_+(0)=-2$. Oboustranná derivace f´(0) tedy neexistuje.

1.3.19 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ , $a\rangle 0$ je konstanta.

*Řešení:*

Snadno zjistíme, že $D_f=\langle -a,a\rangle$, ale že derivaci je možno počítat pouze na otevřeném intervalu $(-a,a)$. Zde platí:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+$$

$$+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}$$

Podle věty o limitě derivace zde bez nesnází zjistíme, že $f'_+(-a)=0$, $f'_-(a)=0$. Můžeme tedy napsat: $\underline{f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}}$ na $\langle -a,a\rangle$.

1.3.20 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=|x|$ .

*Řešení:*

Zřejmě $D_f=(-\infty,+\infty)$. Zde je výhodné napsat

$$f(x)=\left\langle\begin{array}{ll}-x & pro\ x\in(-\infty,0\rangle\\ x & pro\ x\in\langle 0,+\infty)\end{array}\right.,$$

neboť odtud ihned plyne, že

$f'(x)=-1\ \ pro\ x\in(-\infty,0)$, $f'_-(0)=-1$, $f'(x)=1\ \ pro\ x\in(0,+\infty)$, $f'_+(0)=1$.

Z těchto výsledků vidíme, že funkce $f(x)=|x|$ nemá v bodě 0 derivaci a že

$D_{f'}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Můžeme napsat: $\underline{f'(x)=sign\ x}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

1.3.21 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x \cdot |x|$

<u>*Řešení:*</u>
$D_f = (-\infty,+\infty)$, opět použijeme postupu, který jsme viděli v předchozím příkladě. Můžeme tedy psát:

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} -x^2 & pro\ x \in (-\infty,0\rangle \\ x^2 & pro\ x \in \langle 0,+\infty) \end{array} \right.,$$

Odtud ihned plyne:
$f'(x) = -2x \quad pro\ x \in (-\infty,0)$, $f'_-(0) = 0$, $f'(x) = 2x \quad pro\ x \in (0,+\infty)$, $f'_+(0) = 0$.
Vidíme především, že f´(0) = 0, a tedy $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$.
Celkem můžeme napsat: $\underline{f'(x) = 2|x|}$.

Funkce $f(x) = x \cdot |x|$ má sice tvar součinu, má v bodě 0 vlastní derivaci, ale tuto derivaci nelze vypočíst pomocí formule pro derivaci součinu, neboť jedna funkce ze součinu – totiž funkce $|x|$ - nemá v bodě 0 derivaci.

1.3.22 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln|x|$ .

<u>*Řešení:*</u>
$D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, lze psát:

$$f(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \ln(-x) & pro\ x \in (-\infty,0) \\ \ln x & pro\ x \in (0,+\infty) \end{array} \right.$$

Na $(-\infty,0)$ dostáváme: $f'(x) = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$ , na $(0,+\infty)$ dostáváme $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Celkem lze tedy psát: $\underline{(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}}$ pro $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

1.3.23 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$ .

<u>*Řešení:*</u>
$D_f = (-\infty,+\infty)$. Pro výpočet derivace je dobré si všimnout, že můžeme psát $f(x) = (x-1)^2\left|(x+1)^3\right|$. Funkce f(x) má tedy tvar součinu, přičemž prvního činitele umíme snadno zderivovat. Podívejme se proto na derivaci funkce $|(x+1)|^3$:

$$\left|(x+1)^3\right| = \left\langle \begin{array}{ll} -(x+1)^3 & pro\ x \in (-\infty,-1\rangle \\ (x+1)^3 & pro\ x \in \langle -1,+\infty) \end{array} \right.$$

Odtud ihned dostáváme:

$\left|(x+1)^3\right|' = -3(x+1)^2 \quad pro\ x \in (-\infty,-1)$, $\left|(x+1)^3\right|'_{x=-1-} = 0$

$\left|(x+1)^3\right|' = \ \ 3(x+1)^2 \quad pro\ x \in (-1,+\infty)$, $\left|(x+1)^3\right|'_{x=-1+} = 0$

Zřejmě tedy $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$. Výsledek lze zapsat v jednotném tvaru:

$\left|(x+1)^3\right|' = 3(sign\ (x+1)) \cdot (x+1)^2$

Celkem dostáváme (při využití formule pro derivování součinu):

$$f'(x) = \left((x-1)^2 \left|(x+1)^3\right|\right)' = 2(x-1)\left|(x+1)^3\right| + (x-1)^2 \cdot 3(sign\ (x+1)) \cdot (x+1)^2 =$$

$$= 2(x-1)(x+1)^2|x+1| + (x-1)^2 \cdot 3(sign\ (x+1)) \cdot (x+1)^2 = 2(x-1)(x+1)^2(x+1) \cdot sign\ (x+1) +$$

$$+ (x-1)^2 \cdot 3(sign\ (x+1)) \cdot (x+1)^2 = \underline{(x-1)(x+1)^2(5x-1) sign\ (x+1)}$$

1.3.24 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \left|\sin^3 x\right|$ .

*Řešení:*

$D_f = (-\infty, +\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě budeme dávat pozor na intervaly, kde $\sin^3 x \geq 0$ a kde $\sin^3 x \leq 0$ . Jsou to zřejmě intervaly tvaru $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ .

Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ pro <u>k sudé</u> dostáváme $f(x) = \left|\sin^3 x\right| = \sin^3 x$ , odkud plyne:

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x \quad pro\ x \in (k\pi, (k+1)\pi), \ , \ f'_+(k\pi) = 0 \ , \ f'_-((k+1)\pi) = 0$$

Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ pro <u>k liché</u> dostáváme $f(x) = \left|\sin^3 x\right| = -\sin^3 x$ , odkud plyne:

$$f'(x) = -3\sin^2 x \cos x \quad pro\ x \in (k\pi, (k+1)\pi), \ , \ f'_+(k\pi) = 0 \ , \ f'_-((k+1)\pi) = 0$$

Vidíme tedy, že pro libovolné <u>k celé</u> je $f'_+(k\pi) = f'_-(k\pi) = 0$ a že tedy $f'(k\pi) = 0$. Odtud ihned plyne, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Abychom mohli f′(x) vyjádřit pomocí jediné formule, povšimněme si, že lze psát

$$f'(x) = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x \quad pro\ x \in \langle k\pi, (k+1)\pi \rangle \ , je-li\ k\ sudé \\ -\frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x \quad pro\ x \in \langle k\pi, (k+1)\pi \rangle \ , je-li\ k\ liché \end{array} \right.$$

Potřebovali bychom tedy funkci, která se rovná sin x na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ s k sudým a která se rovná – sin x na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi \rangle$ s k lichým. To je ale zřejmě funkce $|\sin x|$ .

Můžeme tedy závěrem napsat: $\underline{\left|\sin^3 x\right|' = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot |\sin x|}$ .

1.3.25 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos\frac{1}{|x|}$ .

*Řešení:*

Zřejmě $D_f = \left\{x; \frac{1}{|x|} \leq 1\right\} = \{x; |x| \geq 1\} = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ .

Na $(1, +\infty)$ dostáváme $f'(x) = \left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Na $(-\infty,-1)$ dostáváme

$$f'(x)=\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}=-\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$=-\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Podle věty o limitě derivace dostáváme navíc:

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1-}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=-\infty$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

Je tedy $D_{f'}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ a platí: $\underline{\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$ .

1.3.25 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=[x]\sin^2\pi x$.

*Řešení:*

$D_f=(-\infty,+\infty)$. Na základě znalostí s funkcí $[x]$ víme, že je vhodné uvažovat interval $\langle n,n+1\rangle$, kde n je celé. Na tomto intervalu zřejmě je $f(x)=n\sin^2\pi x$ a tudíž

$f'(x)=n\cdot(2\sin\pi x\cos\pi x)\pi=\pi n\sin2\pi x \quad pro\ x\in(n,n+1)$ , $f'_+(n)=0$

Zbývá tedy určit $f'_-(n+1)$. Pokusíme se opět použít větu o limitě derivace. Za tímto účelem nejprve ukažme, že funkce f(x) je v bodě n+1 spojitá zleva:

$f(n+1)=[n+1]\sin^2\pi(n+1)=(n+1)\cdot0=0$

$\lim_{x\to(n+1)-}f(x)=\lim_{x\to(n+1)-}n\sin^2\pi x=0$

$\lim_{x\to(n+1)-}f'(x)=\lim_{x\to(n+1)-}(\pi n\sin2\pi x)=0$

Odkud vyplývá, že $f'_-(n+1)=0$. Na základě těchto výsledků snadno vidíme, že funkce f(x) má vlastní derivaci i v každém celočíselném bodě n, přičemž platí f ´(n) = 0. Můžeme tedy napsat, že $D_{f'}=(-\infty,+\infty)$ a že

$$f'(x)=\left\langle\begin{array}{l}\pi n\sin2\pi x \quad pro\ x\in(n,n+1)\\ \quad 0 \quad pro\ x=n\end{array}\right.$$

Chceme-li výsledek zapsat v hezčím tvaru, můžeme psát: $\underline{f'(x)=\pi[x]\sin2\pi x}$ .

1.3.26 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=\left\langle\begin{array}{ll}1-x & pro\ x\in(-\infty,1)\\ (1-x)(2-x) & pro\ x\in\langle1,2\rangle\\ -(2-x) & pro\ x\in(2,+\infty)\end{array}\right.$

*Řešení:*

$D_f=(-\infty,+\infty)$. Lze psát:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & pro\ x \in (-\infty,1\rangle \\ (1-x)(2-x) & pro\ x \in \langle 1,2\rangle \\ -(2-x) & pro\ x \in \langle 2,+\infty) \end{cases}$$

Odtud:

$f'(x) = -1 \quad pro\ x \in (-\infty,1)$ , $f'_-(1) = -1$

$f'(x) = 2x-3 \quad pro\ x \in (1,2)$ , $f'_+(1) = -1$ , $f'_-(2) = 1$

$f'(x) = 1 \quad pro\ x \in (2,+\infty)$ , $f'_+(2) = 1$

Vidíme ihned, že $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$. Celkový výsledek lze zapsat ve tvaru:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & pro\ x \in (-\infty,1) \\ 2x-3 & pro\ x \in \langle 1,2\rangle \\ 1 & pro\ x \in (2,+\infty) \end{cases}$$

1.3.27 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & pro\ x \in \langle a,b\rangle \\ 0 & všude\ jinde \end{cases}$

*Řešení:*

$D_f = (-\infty,+\infty)$. Povšimněme si, že můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} 0 & pro\ x \in (-\infty,a\rangle \\ (x-a)^2(x-b)^2 & pro\ x \in \langle a,b\rangle \\ 0 & pro\ x \in \langle b,+\infty) \end{cases}$$

Odtud získáme ihned:

$f'(x) = 0 \quad pro\ x \in (-\infty,a)$ , $f'_-(a) = 0$

$f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) \quad pro\ x \in (a,b)$ , $f'_+(a) = 0$ , $f'_-(b) = 0$

$f'(x) = 0 \quad pro\ x \in (b,+\infty)$ , $f'_+(b) = 0$

Zase vidíme, že $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$ a celkový výsledek lze zapsat ve tvaru:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & pro\ x \in \langle a,b\rangle \\ 0 & všude\ jinde \end{cases}$$

1.3.28 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} x & pro\ x \in (-\infty,0) \\ \ln(1+x) & pro\ x \in \langle 0,+\infty) \end{cases}$

*Řešení:*

$D_f = (-\infty,+\infty)$. Povšimněme si, že opět můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} x & pro\ x \in (-\infty,0\rangle \\ \ln(1+x) & pro\ x \in \langle 0,+\infty) \end{cases}$$

Odtud dostaneme:

$f'(x) = 1 \quad pro\ x \in (-\infty,0)$ , $f'_-(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad pro\ x \in (0,+\infty)$ , $f'_+(0) = 1$

Vidíme pak, že $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$ a že lze psát:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & pro\ x \in (-\infty,0) \\ \dfrac{1}{1+x} & pro\ x \in \langle 0,+\infty) \end{cases}$$

---

1.3.29 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} arctg\ x & pro|x| \le 1 \\ \dfrac{\pi}{4} sign\ x + \dfrac{x-1}{2} & pro\ |x| \rangle\ 1 \end{cases}$

*Řešení:*

$D_f = (-\infty,+\infty)$. Zřejmě opět můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2} & pro\ x \in (-\infty,-1\rangle \\ arctg\ x & pro\ x \in \langle -1,1\rangle \\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2} & pro\ x \in \langle 1,+\infty) \end{cases}$$

Zde je trochu nepříjemné, že hodnota funkce $-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}$ v bodě –1 není rovna hodnotě funkce arctg x v bodě –1, takže nemůžeme napsat $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}\quad pro\ x \in (-\infty,-1\rangle$.

Každopádně však z předchozího vyjádření funkce f(x) ihned plyne:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \qquad pro\ x \in (-\infty,-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad pro\ x \in (-1,1) \quad , f'_+(-1) = \frac{1}{2} \ , f'_-(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \qquad pro\ x \in (1,+\infty)\ , f'_+(1) = \frac{1}{2}$$

Zbývá jen otázka, jak vypadá $f'_-(-1)$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 1$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Funkce f není tedy v bodě –1 spojitá zleva a odtud je ihned jasné, že pokud $f'_-(-1)$ existuje, může být pouze nevlastní. K důkazu existence $f'_-(-1)$ nemůžeme použít větu o limitě derivace, neboť bohužel není splněn předpoklad spojitosti funkce f v bodě –1 zleva. Nezbývá, než použít definici derivace.

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\leftarrow -1-} \frac{\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}\right) - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1-} \frac{\dfrac{x-1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2} \lim_{x\to -1-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$$

Tím je vyšetřování derivace ukončeno. Zřejmě $D_{f'} = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & pro\ x \in (-1,1\rangle \\ \dfrac{1}{2} & pro\ |x| \rangle\ 1 \end{cases}$$

---

1.3.30 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & pro |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{e} & pro\ |x| \rangle\ 1 \end{cases}$

*Řešení:*

$D_f = (-\infty,+\infty)$. Zřejmě opět můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} & pro\ x \in (-\infty,-1\rangle \\ x^2 e^{-x^2} & pro\ x \in \langle -1,1\rangle \\ \dfrac{1}{e} & pro\ x \in \langle 1,+\infty) \end{cases}$$

Odtud ihned plyne

$f'(x) = 0 \qquad pro\ x \in (-\infty,-1)$ , $f'_-(-1) = 0$

$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2) \quad pro\ x \in (-1,1)$ , $f'_+(-1) = 0$ , $f'_-(1) = 0$

$f'(x) = 0 \qquad pro\ x \in (1,+\infty)$ , $f'_+(1) = 0$

Vidíme tedy, že $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$ a že platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & pro |x| \le 1 \\ 0 & pro\ |x| \rangle\ 1 \end{cases}$$

---

1.3.31 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$ .

*Řešení:*

Zřejmě $D_f = (-\infty,+\infty)$. Podobně jako v příkladě 15 můžeme zde napsat

$f(x) = (x-2)^2\left|(x-1)(x-3)^3\right|$. Odtud vcelku bez obtíží zjistíme, že

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & pro\ x \in (-\infty,1\rangle \cup \langle 3,+\infty) \\ -(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 & pro\ x \in \langle 1,3\rangle \end{cases}$$

Včasné vytknutí výrazu $(x-2)^2$ z absolutní hodnoty nám ukázalo, že při vyšetřování funkce f(x) bod 2 nemusíme vůbec brát v úvahu. Nejprve vypočteme

$\left[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right]' = (x-2)^2(x-3)^3 + (x-1)2(x-2)(x-3)^3 + (x-1)(x-2)^2 3(x-3)^2 =$

$= (x-2)(x-3)^3\left[(x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2)\right] =$

$= (x-2)(x-3)^2\left[6x^2 - 22x + 18\right] = 2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2 - 11x + 9\right]$

Odtud

$f'(x) = 2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2 - 11x + 9\right] \qquad pro\ x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ , $f'_-(1) = -8$ , $f'_+(3) = 0$

$f'(x) = -2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2 - 11x + 9\right] \quad pro\ x \in (1,3)$ , $f'_+(1) = 8$ , $f'_-(3) = 0$

Ihned vidíme, že $D_{f'} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ a že platí:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2-11x+9\right] & pro\ x \in (-\infty,1) \\ -2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2-11x+9\right] & pro\ x \in (1,3\rangle \\ 2(x-2)(x-3)^2\left[3x^2-11x+9\right] & pro\ x \in (3,+\infty) \end{cases}$$

Chceme-li vyjádřit f ′(x) pomocí jediné formule, potřebujeme funkci $\rho(x)$ takovou, že

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & pro\ x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty) \\ -1 & pro\ x \in (1,3) \\ 0 & pro\ x = 3 \end{cases}$$

Lze si ale všimnout, že taková funkce opravdu existuje a je $\rho(x) = sign(x-1)\ sign(x-3)$ .

Takže můžeme napsat: $\underline{f'(x) = 2sign\ (x-1)\ sign\ (x-3)\cdot(x-2)(x-3)^2\left[3x^2-11x+9\right]}$

1.3.32 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \left|\pi^2 - x^2\right|\sin^2 x$ .

*Řešení:*

$D_f = (-\infty,+\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě vyskytující se ve vyjádření funkce f(x) budeme uvažovat intervaly $(-\infty,-\pi\rangle$ , $\langle-\pi,\pi\rangle$ , $\langle\pi,+\infty)$. Můžeme zřejmě psát

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-\pi^2)\sin^2 x & pro\ x \in (-\infty,-\pi\rangle \cup \langle\pi,+\infty) \\ (\pi^2-x^2)\sin^2 x & pro\ x \in \langle-\pi,\pi\rangle \end{cases}$$

Odtud

$$f'(x) = 2x\sin^2 x + (x^2-\pi^2)2\sin x\cos x = 2\sin x\left[x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\right] \quad pro\ x \in (-\infty,-\pi\rangle \cup \langle\pi,+\infty)$$

$$f'_-(-\pi) = 0\ ,\ f'_+(\pi) = 0$$

$$f'(x) = -2\sin x\left[x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\right] \quad pro\ x \in (-\pi,\pi)$$

$$f'_+(-\pi) = 0\ ,\ f'_-(\pi) = 0$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty,+\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$\underline{f'(x) = -2\left(sign(\pi^2-x^2)\right)\sin x\left[x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\right]}$

1.3.33 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

*Řešení:*

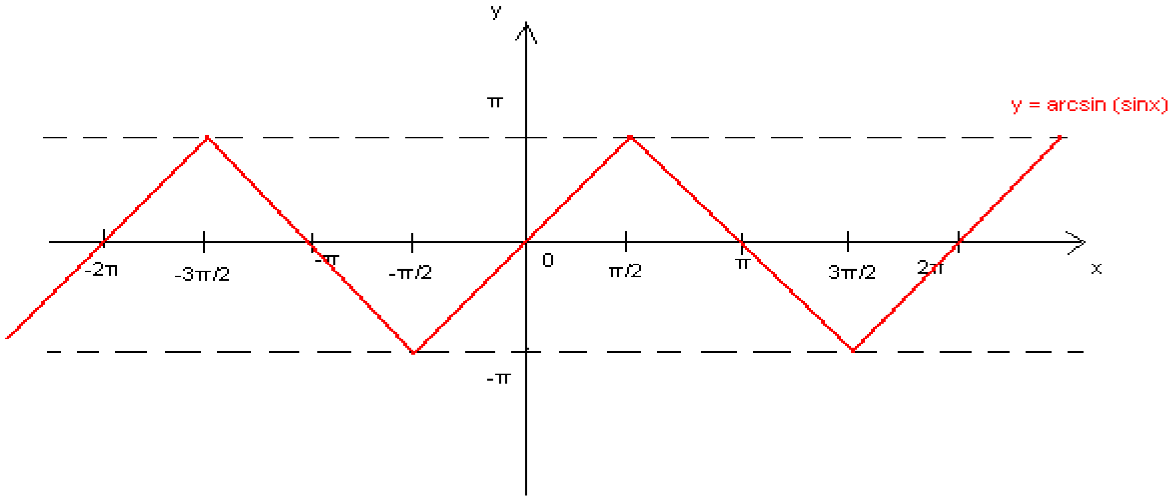
Zřejmě $D_f = (-\infty,+\infty)$, neboť oborem hodnot funkce sin x je interval $\langle-1,1\rangle$ a tentýž interval je definičním oborem funkce arcsin y. Funkce arcsin y se zavádí jako funkce inverzní k funkci sin x, což velmi svádí k tomu, napsat arcsin(sin x) = x. Toto je zásadní chyba, neboť je třeba si uvědomit, že funkci arcsin y definujeme jako inverzní funkci k funkci sin x uvažované pouze na intervalu $\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Platí tedy arcsin (sin x) = x, ale pouze pro $x \in \langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Pro detailní rozbor funkce arcsin (sin x) je dobré si povšimnout, že tato funkce je periodická s periodou 2π. Stačí ji tedy uvažovat na intervalu délky 2π. My si vybereme interval $\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$

Na intervalu $\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$, jak již bylo uvedeno, máme arcsin (sin x) = x .

Na intervalu $\langle-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle$ potom dostáváme:

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin((x-\pi)+\pi)) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$$
$$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -(x-\pi) = \pi - x$$

Neboť $x-\pi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pro lepší zapamatování uvedeme graf funkce arcsin (sin x).




Z předchozích výsledků ihned plyne:

$$f'(x) = \ \ 1 \quad pro\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ f'_+(-\frac{\pi}{2}) = 1,\ f'_-(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f'(x) = -1 \quad pro\ x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}),\ f'_+(\frac{\pi}{2}) = -1,\ f'_-(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

Odtud s použitím periodičnosti snadno vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$ a že

$$f'(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & pro\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z \\ -1 & pro\ x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in Z \end{array} \right.$$

---

1.3.34 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $pro\ x \neq 0$, $f(0) = 0$.

*Řešení:*

$D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro $x \neq 0$ vypočteme

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)' = \frac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

---

Zbývá vyšetřit, zda existuje derivace nebo zda existují alespoň jednostranné derivace v bodě 0. Zde je asi nejlépe, povšimneme-li si poměrně technicky výhodného tvaru funkce f(x) a začneme počítat $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ podle definice:

$$f_{-}^{'}(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

$$f_{+}^{'}(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

Tedy $D_{f'}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ a f´(x) pro $x\neq 0$ je určeno výše uvedenou formulí.

Pokud se nerozhodneme počítat $f_{-}^{'}(0)$ a $f_{+}^{'}(0)$ podle definice, můžeme ještě použít větu o limitě derivace. Tento postup ale, jak ihned uvidíte, je zde podstatně technicky náročnější. Předně, abychom větu o limitě derivace mohli použít, musíme ověřit, zda funkce f(x) je v bodě 0 spojitá.

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0-}x}{\lim\limits_{x\to 0-}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}=\frac{0}{1}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0+}x\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0\cdot 0=0=f(0)$$

Funkce f(x) je tedy v bodě 0 spojitá, takže můžeme počítat limitu derivace.

$$\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}\right]=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\cdot\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}=1+\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\cdot 1=1+\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Poslední limitu lze vypočítat tímto způsobem:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{-\frac{1}{y}}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y}}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^{y}}=0$$

Při výpočtu jsme použili větu o limitě složené funkce (vnitřní funkce je $-\frac{1}{x}$, vnější funkce je $-\frac{y}{e^{y}}$ a l´Hospitalovo pravidlo. Vychází tak $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=1$ a tudíž dostáváme opět $f_{-}^{'}(0)=1$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}\right] = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} =$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Odtud znova dostáváme $f'_+(0) = 0$

1.3.35 Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.

_Řešení:_
Za účelem určení definičního oboru uvažujme nerovnost

$$1-e^{-x^2} \geq 0$$

$$e^{-x^2} \leq 1$$

$$-x^2 \leq 0$$

Poslední nerovnost je splněna pro všechna reálná x, odkud plyne $D_f = (-\infty,+\infty)$. Vnitřní funkce $1-e^{-x^2}$ má vlastní derivaci v každém bodě, vnější funkce $\sqrt{y}$ v každém bodě $y \rangle 0$.
Je tedy třeba, za účelem použití věty o derivaci složené funkce, vyloučit body, v nichž $1 - e^{-x^2} = 1$. Takový bod je ale pouze jeden, a to bod x = 0. Pro $x \neq 0$ můžeme tedy použít větu o derivaci složené funkce. Dostáváme tak:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1-e^{-x^2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}\cdot\left(-e^{-x^2}\right)\cdot(-2x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$$

---

Zbývá vyšetřit bod x = 0.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{-\sqrt{x^2}} = -\lim_{x\to 0-}\sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0-}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1$$

Upozorněme opět, že při výpočtu limity v bodě 0 zleva uvažujeme $x \langle 0$ a tudíž $x = -\sqrt{x^2}$.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ a f′(x) pro $x \neq 0$ je určeno výše uvedenou formulí.

1.3.36 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ .

<u>*Řešení:*</u>
Za účelem určení definičního oboru uvažujme nerovnost

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 1$$

$$2|x|\le 1+|x|^2$$

$$0\le 1-2|x|+|x|^2$$

$$0\le\left(1-|x|\right)^2$$

Odtud ihned vidíme, že $D_f=(-\infty,+\infty)$. Zároveň je zřejmé, že funkce f(x) je na celém svém definičním oboru spojitá. Vnější funkce arcsin y nemá vlastní derivace v bodech –1 , 1 a proto se za účelem použití věty o derivaci složené funkce musí vyloučit body, pro které je $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|=1\Leftrightarrow\left(1-|x|\right)^2=0$ . Jedná se tedy o dva body –1 a 1. Pro $x\ne\mp1$ dostáváme:

$$f'(x)=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\left|1-x^2\right|\left(1+x^2\right)}=\underline{\frac{2sign(1-x^2)}{1+x^2}}$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1-}f'(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{2sign(1-x^2)}{1+x^2}=2\lim_{x\to-1-}\frac{-1}{1+x^2}=-1$$

Analogickým postupem zjistíme, že $f'_+(-1)=1$ , $f'_-(1)=1$ , $f'_+(1)=-1$
Vidíme tedy, že $D_{f'}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

1.3.37 Vypočtěte derivaci funkce $f(x)=(x-2)arctg\dfrac{1}{x-2}$ , *pro* $x\ne2$ , $f(2)=0$.

<u>*Řešení:*</u>
Zřejmě $D_f=(-\infty,+\infty)$. Pro $x\ne2$ dostáváme:

$$f'(x)=\left((x-2)arctg\frac{1}{x-2}\right)'=arctg\frac{1}{x-2}+(x-2)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=$$

$$\underline{=arctg\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2-4x+5}}$$

Vzhledem k příznivému tvaru funkce f(x) bude vhodné jednostranné derivace v bodě 2 počítat podle definice:

$$f'_{-}(2) = \lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2-} arctg \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} arctg \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.