1.3 Derivace funkce

1.3.38 $f(x) = \left|\ln|x|\right|$

Řešení:
$D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Funkce *lnx* mění znaménko v bodě $x = 1$, takže funkce bude měnit znaménko v bodech $x = 1$ a $x = -1$ (je to sudá funkce). Snadno vidíme, že

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & pro\ x \in (-\infty,1\rangle \\ -\ln(-x) & pro\ x \in \langle -1,0) \\ -\ln x & pro\ x \in (0,1\rangle \\ \ln x & pro\ x \in \langle 1,\infty) \end{cases}$$

Odtud

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad pro\ x \in (-\infty,-1)$$
$$f'_-(-1) = -1$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x} \quad pro\ x \in (-1,0)$$
$$f'_+(-1) = 1$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x} \quad pro\ x \in (0,1)$$
$$f'_-(1) = -1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad pro\ x \in (1,+\infty)$$
$$f'_+(1) = 1$$

Vidíme, že $D_{f'} = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Celkový výsledek lze zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{sign(|x|-1)}{x}.$$

1.3.39 Vypočtěte $f^{(6)}$ *a* $f^{(7)}$ funkce $f(x) = x(2x-1)^2(x+3)^3$.

Řešení:
Uvažovaná funkce je zřejmě polynomem stupně 6. Tedy $D_f = D_f(6) = D_f(7) = (-\infty,+\infty)$. Obecně snadno vidíme, že m-tá derivace polynomu stupně n při $m > n$ je rovna 0. Tedy $f^{(7)}(x) = 0$. K výpočtu 6-té derivace použijeme Leibnitzovu formuli.

$$f^{(6)}(x) = \left[x(2x-1)^2(x+3)\right]^{(6)} = \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\left[x(2x-1)^2\right]^{(i)} \cdot \left[(x+3)^3\right]^{(6-i)} = \binom{6}{3}\left[x(2x-1)^2\right]^{(3)} \cdot \left[(x+3)^3\right]^{(3)} =$$
$$= 20\left[x(2x-1)^2\right]^{(3)} \cdot \left[(x+3)^3\right]^{(3)}$$

neboť všechny ostatní sčítance se z výše uvedeného důvodu anulují. Podobně zjistíme, že

$$\left[x(2x-1)^2\right]^{(3)} = \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}[x]^{(i)} \cdot \left[(2x-1)^2\right]^{(3-i)} = 3[x]^{(1)} \cdot \left[(2x-1)^2\right]^{(2)} = 3 \cdot 1 \cdot 8 = 24$$

Vychází tedy

$$f^{(6)}(x) = 20 \cdot 24 \cdot \left[(x+3)^3\right]^{(3)} = 480 \cdot 6 = 2880.$$

1.3.40 Vypočtěte $f^{(20)}$ funkce $f(x) = x^2 e^{2x}$.

Řešení:
Zřejmě $D_f = D_f(20) = (-\infty, +\infty)$. Podle Leibnitzovy formule dostáváme

$$f^{(20)}(x) = \sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\left(x^2\right)^{(i)} \cdot \left(e^{2x}\right)^{(20-i)} = \binom{20}{0}\left(x^2\right)^{(0)} \cdot \left(e^{2x}\right)^{(20)} + \binom{20}{1}\left(x^2\right)^{(1)} \cdot \left(e^{2x}\right)^{(19)} + \binom{20}{2}\left(x^2\right)^{(2)} \cdot \left(e^{2x}\right)^{18},$$

neboť všechny ostatní sčítance se anulují. Vychází tak

$$\underline{x^2 2^{20} e^{2x} + 20 \cdot 2x \cdot 2^{19} \cdot e^{2x} + 190 \cdot 2 \cdot 2^{18} \cdot e^{2x} = 2^{20} \cdot e^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right).}$$

1.3.41 Vypočtěte $f^{(10)}$ funkce $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Řešení:
$D_f = D_f(10) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$f^{(10)}(x) = \left(e^x \cdot \frac{1}{x}\right)^{(10)} = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}\left(e^x\right)^{(i)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)} = \sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}e^x \cdot (-1)^{10-i}\frac{(10-i)!}{x^{10-i+1}} =$$
$$= e^x \sum_{i=0}^{10}\frac{10!}{i!(10-i)!}(-1)^{10-i}\frac{(10-i)!}{x^{10-i+1}} = e^x \sum_{i=0}^{10}(-1)^{10-i}\frac{10!}{i!}\frac{1}{x^{10-i+1}} = e^x \sum_{i=0}^{10}(-1)^i \frac{10!}{(10-i)!}\frac{1}{x^{i+1}} =$$
$$= e^x \sum_{i=0}^{10}(-1)^i \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (10-i+1)}{x^{(i+1)}}.$$

1.3.42 Vypočtěte $f^{(100)}$ funkce $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

Řešení:

Zřejmě $D_f = D_f(100)=(-\infty,1)$. Protože $f(x)=(1+x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ můžeme zkusit postupovat tak jako v příkladě 33

$$f^{(100)}(x)=\left((1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}+(1+x)^{(i)}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100-i)}=$$
$$=(1+x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}+100\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(99)}.$$

Potřebujeme vědět, jak vypadá $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(k)}$. Postupně dostáváme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}$$

Odkud vidíme, že

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(k)}=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2k+1}{2}}},\qquad k\in N$$

Důkaz tohoto vztahu lze provést indukcí. (Symbol $(2k-1)!!$ označuje součin $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$. Dostáváme potom

$$f^{(100)}(x)=(1+x)\frac{199!!}{2^{100}}\frac{1}{(1-x)^{\frac{201}{2}}}+100\cdot\frac{197!!}{2^{99}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{199}{2}}}=\frac{197!!}{2^{100}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}\left[199(1+x)+200(1-x)\right]=$$
$$=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}.$$

1.3.43 Vypočtěte $f^{(8)}$ funkce $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Řešení:

Zde $D_f = D_f(8)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. V tomto případě je nejlepší funkci rozložit následujícím způsobem:

$$\frac{x^2}{1-x}=\frac{(x^2-1)+1}{1-x}=\frac{x^2-1}{1-x}+\frac{1}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x}$$

Odtud

$$f^{(8)}(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(8)}$$

Podobně jako v předchozím příkladě snadno zjistíme, že

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\,,\quad k\in N$$

Dostáváme tedy

$$f^{(8)}(x)=\frac{8!}{(1-x)^9}.$$

1.3.43 Vypočtěte $f^{(10)}$ funkce $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x.$

Řešení:

$D_f=D_f(10)=(-\infty,+\infty)$. Na první pohled je vidět, že jakýkoliv přímý výpočet by byl dosti zdlouhavý. Naštěstí je ale možné funkci nejprve upravit. Použijeme trigonometrické formule

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Dostáváme

$$\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{2}[\cos x-\cos 3x]\sin 3x=\frac{1}{2}\sin 3x\cos x-\frac{1}{4}2\sin 3x\cos 3x=$$
$$=\frac{1}{4}[\sin 2x+\sin 4x]-\frac{1}{4}\sin 6x=\frac{1}{4}[\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x]$$

Připomeňme, že pro $k\in\{0\}\cup N$ je

$(\sin x)^{(4k)}=\sin x$

$(\sin x)^{(4k+1)}=\cos x$

$(\sin x)^{(4k+2)}=-\sin x$

$(\sin x)^{(4k+3)}=-\cos x$

Speciálně tedy $(\sin x)^{(10)}=-\sin x.$ Odtud již snadno plyne, že

$$f^{(10)}(x)=\frac{1}{4}[\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x]^{(10)}=\frac{1}{4}\left[-2^{10}\sin 2x-4^{10}\sin 4x+6^{10}\sin 6x\right]=$$
$$=-2^{8}\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^{8}\cdot 3^{10}\sin 6x.$$

1.3.44 Vypočtěte $f^{(n)}$ funkce $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

Řešení:

$D_f=D_f(n)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x)^{(i)}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n-i)}=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}+n\right)^{(n)}+n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(n-1)}$$

Snadno vypočteme

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^{4/3}}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^{7/3}}$$

Odtud již vidíme, že platí

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\right)^{(k)}=(-1)^k\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{3^k}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{3k+1}{3}}},\quad k\in N$$

Dostáváme tedy

$$f^{(n)}(x)=x(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3n+1}{3}}}+n(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3(n-1)-2)}{3^{n-1}}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{3(n-1)+1}{3}}}=$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)}{3^n}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{3n+1}{3}}}\cdot[-x(3n-2)+3n(1+x)]=\frac{(-1)^{n-1}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)(2x+3n)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}.$$