1.5 Derivace vyšších řádů

1.5.1 Najděte n-tou derivaci funkce $y = x^n$.

Řešení:

$y' = n\,x^{n-1}$,

$y'' = n\,(n-1)\;x^{n-2}$,

……………………

$y^{(n)} = \underline{n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \underline{n!}$

1.5.2 Vypočtěte $\left(\sin\ x^2\right)'''$.

Řešení:

Ve funkci $y = \sin x^2$ zavedeme substituci $u = x^2$ a derivujeme jako složenou funkci:

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 2\,x\cos x^2$, *tedy* $y'' = \left(2\,x\cos x^2\right)'$, což budeme derivovat jako součin,

přičemž $\left(\cos x^2\right)' = -\,2\,x\sin x^2$. Vyjde $y'' = 2\cos x^2 - 2\,x\left(2\,x\sin x^2\right) = 2\cos x^2 - 4\,x^2\sin x^2$.

Podobně $y''' = \left(\sin x^2\right)''' = \underline{-\,12\,x\sin x^2 - 8\,x^3\cos x^2}$.

1.5.3 Vypočítejte rychlost a zrychlení harmonického kmitavého pohybu.

Řešení:

Závislost okamžité výchylky s na čase t je dána harmonickou funkcí např.

$$s = A\cos\left(2\,\pi\frac{t}{T} + \varphi\right).$$

Rychlost pohybu je

$$v = \frac{ds}{dt} = \underline{-\frac{2\,\pi}{T}A\sin\left(2\,\pi\frac{t}{T} + \varphi\right)}.$$

Zrychlení je

$$a = \frac{dv}{dt} = \underline{-\frac{4\,\pi^2}{T}A\cos\left(2\,\pi\frac{t}{T} + \varphi\right)}.$$

1.5.4 Zjistěte jaký typ pohybu vykonává těleso při volném pádu.

Řešení:

Rovnice dráhy volně padajícího tělesa je $s = \dfrac{1}{2}g\,t^2$, kde g je tzv. gravitační konstanta.

Rychlost je $v = \dfrac{ds}{dt} = \underline{g\,t}$ a zrychlení $a = \dfrac{dv}{dt} = \underline{g}$.

Z výsledku je zřejmé, že volně padající těleso koná pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením rovným g.

1.5.5 Najděte druhou derivaci funkce $y = f(x)$ dané parametricky vztahy
$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in (0, \pi)$.

Řešení:

$$f'(x) = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t.$$

$$(a\cos t)' = -a\sin t, \qquad (b\sin t)' = b\cos t\,,$$

$$(a\cos t)'' = -a\cos t, \qquad (b\sin t)'' = -b\sin t\,,$$

$$pak \quad f''(x) = \frac{ab\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{(-a\sin t)^3} = \underline{-\frac{b}{a^2\sin^3 t}}.$$