1.6 Průběh funkce

1.6.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x + 2\,arc\cot g\ x, \quad D(f) = (-\infty, +\infty).$

Řešení:
Funkce není sudá, lichá ani periodická. Platí
$\lim\limits_{x \to \infty} (x + 2\,arc\cot g\,x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2\,arc\cot g\,x) = -\infty.$
Nyní budeme hledat body, ve kterých má případně funkce lokální extrém popř. inflexní bod.
K tomu vypočítáme $f'(x), f''(x).$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, x \in (-\infty, \infty).$ Položíme $f'(x) = 0$ a odtud zjistíme $x_1 = 1, x_2 = -1.$ Protože $f''(x) = \dfrac{4x}{(1 + x^2)^2}$, pro $x_1\ a\ x_2\ je\ f''(1) \rangle\ 0, f''(-1) \langle\ 0$, má funkce v bodě 1 lokální minimum, v bodě -1 lokální maximum, jejichž velikosti jsou $f(-1) = \dfrac{3\pi}{2} - 1 \quad a$

$f(1) = \dfrac{\pi}{2} + 1.$

Položíme-li $f''(x) = 0$, zjistíme, že v $x_3 = 0$ má funkce inflexní bod, v němž směrnice tečny je $f'(0) = -1.$
Zjištěné poznatky sestavíme do tabulky

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
	konkávní	konkávní	konvexní	konvexní

1.6.2. Jaký je třeba volit tvar válcové nádoby kalorimetru daného objemu V, aby tepelné ztráty byly co nejmenší.

Řešení:
Ztráty vyzařování budou nejmenší, bude-li nejmenší povrch. Hledáme tedy takový poloměr r kruhové základny a výšku válce v, aby povrch při daném objemu V byl minimální.
Nejprve zjistíme závislost povrchu S na rozměrech válce:

$$V = \pi r^2 v, \quad odtud \quad v = \frac{V}{\pi r^2},$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Podmínka lokálního extrému $\dfrac{dS}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0$ je splněna pro $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}$.

Protože $\left(\dfrac{d^2S}{dr^2}\right)_{r_0} = 12\pi \rangle\, 0$, našli jsme skutečně poloměr základny nádoby s minimálním

povrchem. Tedy taková nádoba bude mít rozměry $\underline{r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{v}{2\pi}}}$ a $v = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} = \underline{2r_0}$.

1.6.3 Vyšetřete průběh funkce $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$.

Řešení:

$D_f = R$, funkce není sudá ani lichá, není ani periodická

$$\lim_{x\to+\infty} x^4\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow$ nemá vertikální asymptoty, ani asymptotu se směrnicí

$$\lim_{x\to-\infty} x^4\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{12}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right) = +\infty$$

$y' = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 \qquad y' = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 3$

$y'' = 12x^2 - 24x - 4 \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow 3\left(x-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

$x_1 = 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = 1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

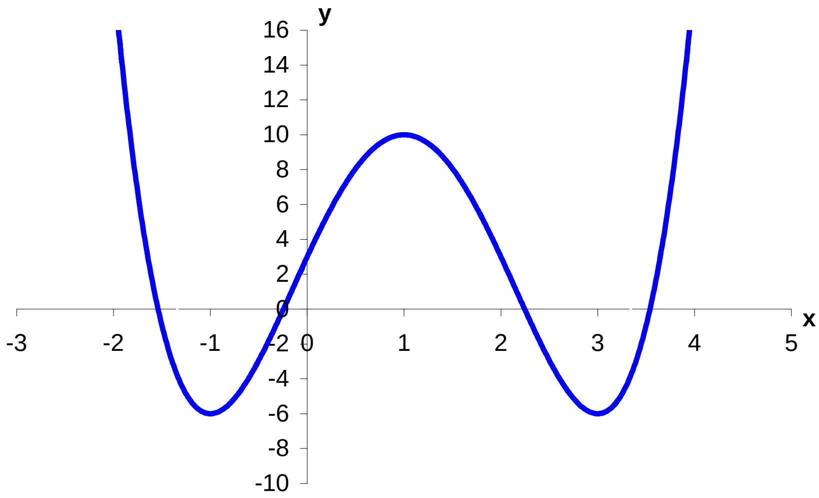
	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1-\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{3},1)$	1	$(1,1+\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$(1+\frac{2\sqrt{3}}{3},3)$	3	$(3,+\infty)$
y		-6			10			-6	
y´	-	min	+	+	max	-	-	min	+
y´´	+	32	+	-	-16	-	+	32	+

Rostoucí na intervalech: $(-1,1)$ *a* $(3,+\infty)$

Klesající na intervalech: $(-\infty,-1)$ *a* $(1,3)$

Konvexní na intervalech: $(-\infty,1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ *a* $(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$

Konkávní na intervalu: $(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$



1.6.4 Vyšetřete průběh funkce $y = x + \dfrac{x}{3x-1}$

__Řešení:__

$D_f = R \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$, funkce není sudá ani lichá, není ani periodická

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{3-\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x + \dfrac{1}{3-\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} x + \dfrac{x}{3x-1} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} x + \dfrac{x}{3x-1} = +\infty \qquad \Rightarrow$ vertikální asymptota $x = \dfrac{1}{3}$

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3x-1}\right) = 1 \qquad q = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow$ asymptota se směrnicí $y = x + \dfrac{1}{3}$

$y' = 1 - \dfrac{1}{(3x-1)^2} \qquad y' = 0 \iff (3x-1)^2 = 1 \iff 3x(3x-2) = 0$

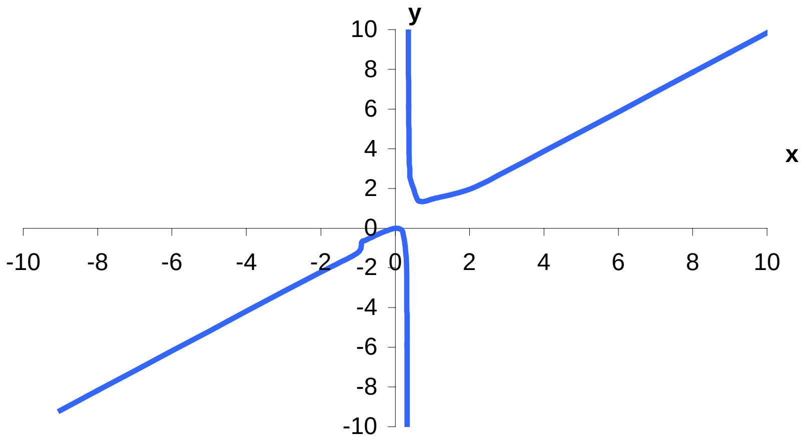
$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$y'' = \dfrac{6}{(3x-1)^3} \qquad y' \neq 0 \Rightarrow$ nemá inflexní body

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y	-	0	-	Vertikální asymptota	+	$\frac{4}{3}$	+
y´	+	max	-		-	min	+
y´´	-	-6	-		+	6	+

Rostoucí na intervalech: $(-\infty,0)$ *a* $(\frac{2}{3},+\infty)$

Klesající na intervalu: $(0, \frac{2}{3})$



1.6.5 Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

Řešení:

$D_f = R \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, funkce je lichá, není periodická

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{3}{x^2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{3}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty \qquad \Rightarrow \text{vertikální asymptota } x = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} \frac{x^3}{x^2-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{x^3}{x^2-3} = +\infty \qquad \Rightarrow \text{vertikální asymptota } x = -\sqrt{3}$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-3}\right) = 1 \qquad q = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2-3} = 0 \qquad \Rightarrow \text{asymptota se směrnicí } \ y = x$$

$$y' = \frac{x^4 - 9x^2}{\left(x^2-3\right)^2} \qquad y' = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2\left(x^2-9\right)^2 = 0 \ \Leftrightarrow x^2(x-3)(x+3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -3$$

$$y'' = \frac{6x^3 + 54x}{(x^2-3)^3} \qquad y'' = 0 \ \Leftrightarrow 6x(x^2+9) = 0$$

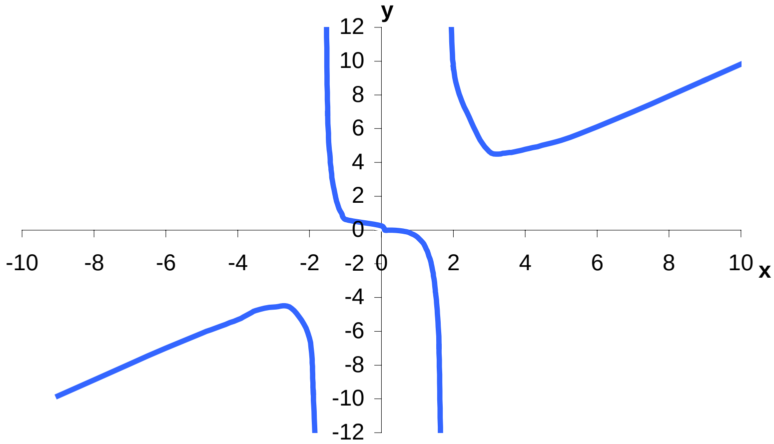
$$x = 0$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0
y	-	-4,5	-	Vertikální asymptota	+	0
y´	+	max	-		-	0
y´´	-	-1,5	-		-	0

(zbytek tabulky není potřeba, neboť funkce je lichá, tzn. symetrická podle počátku soustavy souřadnic)

Rostoucí na intervalech: $(-\infty,-3)$ a $(3,+\infty)$

Klesající na intervalech: $(-3,-\sqrt{3})$ a $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3},3)$



1.6.6 Vyšetřete průběh funkce $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

Řešení:

$D_f=R\setminus\{0\}$, funkce je lichá, není periodická

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=+\infty \qquad \Rightarrow$ vertikální asymptota $x=0$

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2} \qquad q=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0 \qquad \Rightarrow$ asymptota se směrnicí $y=\frac{x}{2}$

$y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2} \qquad y'=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-4=0$

$x_1=-2 \quad x_2=2$

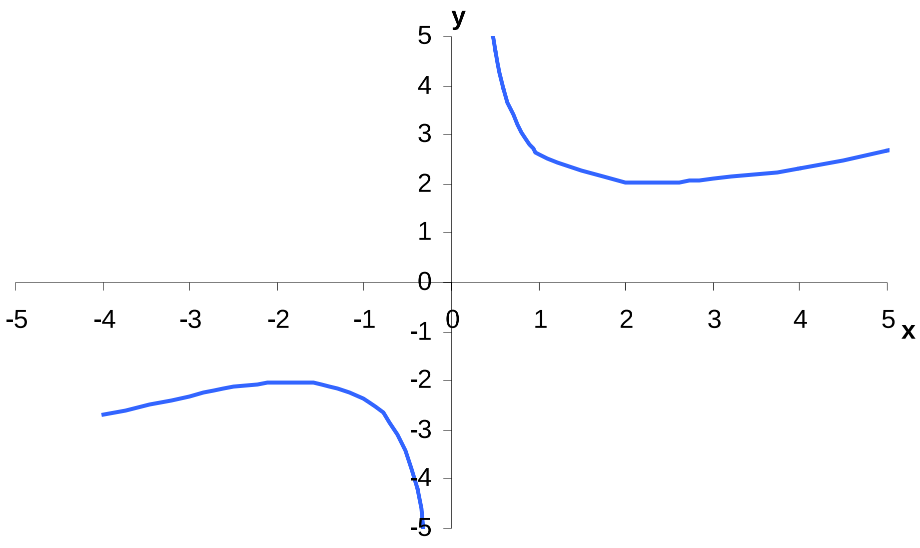
$y''=\frac{4}{x^3} \qquad y''\neq 0 \;\Rightarrow$ nemá inflexní body

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0
y	-	-2	-	Vertikální asymptota
y´	+	max	-	
y´´	-	-0,5	-	

(zbytek tabulky není potřeba, neboť funkce je lichá, tzn. symetrická podle počátku soustavy souřadnic)

Rostoucí na intervalech: $(-\infty,-2)$ a $(2,+\infty)$

Klesající na intervalech: $(-2,0)$ a $(0,2)$



1.6.7 Vyšetřete průběh funkce $y = 2|x| - x^2$

Řešení:

$D_f = R$, funkce je sudá, není periodická

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ nemá vertikální asymptoty, ani asymptotu se směrnicí

$$\lim_{x \to -\infty} -x^2 \left(\frac{2}{x} + 1 \right) = -\infty$$

$x \in R^+$:

$y' = 2 - 2x \qquad y' = 0 \iff 2 - 2x = 0$

$x = 1$

$x \in R^-$:

$y' = -2 - 2x \qquad y' = 0 \iff -2 - 2x = 0$

$x = -1$

$x \in R^+$:

$y'' = -2 \qquad y' \neq 0$

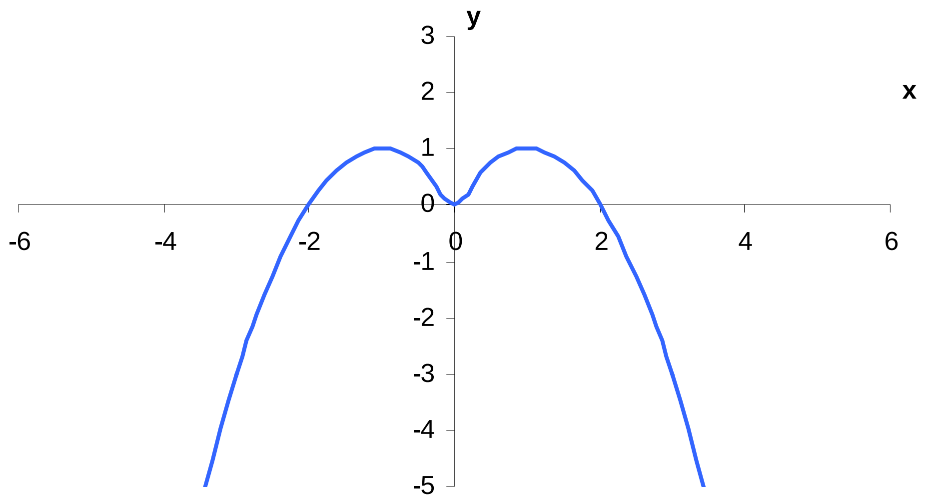
$x \in R^-$:

$y'' = -2 \qquad y'' \neq 0$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y		1	+	0	+	1	
y′	+	max	-	min	+	max	-
y′′	-	-2	-	-2	-	-2	-

Rostoucí na intervalech: $(-\infty,-1)$ *a* $(0,1)$

Klesající na intervalech: $(-1,0)$ *a* $(1,+\infty)$



1.6.8 Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{x}{\sqrt{|x+2| + x + 2}}$

<u>Řešení:</u>

$D_f = (-2, +\infty)$, funkce není sudá ani lichá, není ani periodická

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{\sqrt{2x+4}} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x+4}} = +\infty$$

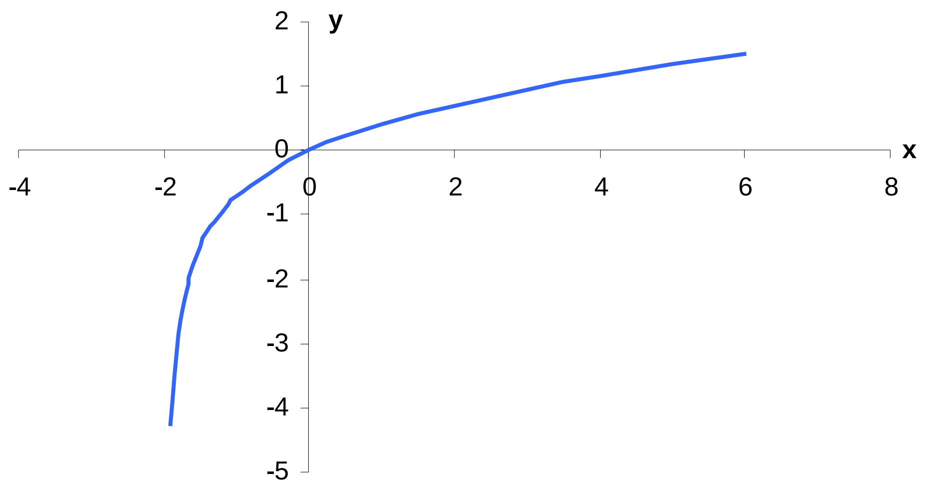
vertikální asymptota x = -2 , nemá asymptoty se směrnicí

$$y' = \frac{\sqrt{2x+4} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2}{2x+4} = \frac{x+4}{(2x+4)^{\frac{3}{2}}} \qquad y' = 0 \iff x = -4 \notin D_f$$

nemá lokální extrém

$$y'' = \frac{(2x+4)^{\frac{3}{2}} - (x+4) \cdot \frac{3}{2} \cdot (2x+4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{(2x+4)^3} = \frac{-x-8}{(2x+4)^{\frac{5}{2}}} \qquad y'' = 0 \iff x = -8 \notin D_f$$

nemá inflexní body


y
x
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-2
0
2
4
6
8