2.1 Parciální derivace prvního a vyšších řádů

2.1.1 Proveďte všechny parciální derivace funkce $\psi(x, y)$ až do 2. řádu.

$$\psi(x,t) = A e^{\omega t - kx + \varphi}\ ,\ A, \omega, k, \varphi \in R^+$$

Řešení:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A e^{\omega t - kx + \varphi} \cdot (-k) = \underline{-k\psi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A e^{\omega t - kx + \varphi} \cdot \omega = \underline{\omega\psi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k \cdot A e^{\omega t - kx + \varphi} \cdot (-k) = \underline{\psi k^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \cdot A e^{\omega t - kx + \varphi} \cdot \omega = \underline{\omega^2 \psi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = \underline{\psi\, \omega (-k)}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial x} = \underline{\psi\, \omega (-k)}$$

2.1.2 Určete obě parciální derivace funkce f (x,y) 1.řádu.

$$f(x, y) = x^{\sin y}\ ,\ x \rangle\ 0$$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\sin y\ x^{\sin y - 1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{x^{\sin y}\ \cos y \ln x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{\cos y\ x^{\sin y - 1} + \sin y\ x^{\sin y - 1}\ \ln x}$$

2.1.3 Proveďte všechny parciální derivace funkce f (x,y) až do 2. řádu.

Řešení:

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{y\ x^{y-1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{x^y \ln x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{x^{y-1} + y\, x^{y-1} \ln x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underline{x^y \frac{1}{x} + y\, x^{y-1} \ln x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{y(y-1)x^{y-2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{x^y \ln^2 x}$$

2.1.4. Určete všechny parciální derivace funkce f (x,y) až do 3. řádu.

$f(x,y) = x\, y^3 + \sin xy$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underline{y^3 + y\cos xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{3\,xy^2 + x\cos xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{3\,y^2 + \cos xy - xy\sin xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underline{3\,y^2 + \cos xy - xy\sin xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underline{y^2(-\sin xy)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{6\,xy - x^2 \sin xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \underline{-\,y^3 \cos xy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \underline{6\,x - x^3 \cos xy}$$

2.1.5 Proveďte všechny parciální derivace funkce $\psi(x,y)$ až do 2. řádu.

$\psi(x,t) = A\sin(\omega t - k\,x + \varphi),\ A,\ \omega, k, \varphi \in R^+$

Řešení:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \underline{A\cos(\omega t - k\,x + \varphi)\cdot(-k)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \underline{A\cos(\omega t - k\,x + \varphi)\cdot \omega}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\,A k^2 \sin(\omega t - k x + \varphi) = \underline{-\psi k^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\,A \omega^2 \sin(\omega t - k x + \varphi) = \underline{-\,\omega^2 \psi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = A \omega k \sin(\omega t - k x + \varphi) = \underline{\omega k \psi}$$

2.2.6 Dokažte, že funkce $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je diferencovatelná v libovolném bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in E_2$.

Řešení:

$$\Delta f(x^0) = (x_1^0 + \Delta x_1)^2 + (x_2^0 + \Delta x_2)^2 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 =$$

$$= 2 x_1^0 \Delta x_1 + 2 x_2^0 \Delta x_2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 . \qquad (1)$$

Současně platí

$$\Delta f(x^0) = D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \omega(\Delta x)|\Delta x| . \qquad (2)$$

Porovnáním (1) a (2) obdržíme

$$D_1 = 2 x_1^0 ,\; D_2 = 2 x_2^0 ,\; \omega(\Delta x) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$

a tedy $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0}} \omega(\Delta x) = \underline{0}$.

2.2.7 Vypočtěte parciální derivace funkce $z = x^3 y^2 + x y^3$ v bodě $x_0 = 0,\; y_0 = 1$.

Řešení:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \left[3 x^2 y^2 + y^3\right]_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{1}.$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \left[2 x^3 y + 3 x y^2\right]_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{0}.$$

2.2.8 Najděte parciální derivace funkce

$$u = 3 x^2 + \frac{x - y}{x + y} - e^{x + y + z} .$$

Řešení:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6 x + \frac{(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} - e^{x + y + z} = \underline{6 x + \frac{2 y}{(x + y)^2} - e^{x + y + z}} ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underline{-\frac{2 x}{(x + y)^2} - e^{x + y + z}} , \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \underline{-\,e^{x + y + z}} .$$

2.2.9 Určete velikost úhlu α, který svírá s osou x tečna t_1 v bodě $T = [2, 4, z_0]$ k řezu plochy $4 z = x^2 + y^2$ rovinou $y = 4$.

Řešení:

Bod T leží na ploše, proto jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy, odtud $z_0 = 5$.

Daný řez je průsečnicí rovin $4z = x^2 + y^2$ a $y = 4$, má tedy rovnici $z = \frac{x^2}{4} + 4$ (v rovině y = 4). Směrnice tečny je $tg\,\alpha = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=2} = \left.\frac{x}{2}\right|_{x=2} = 1$, $\alpha = \underline{\frac{1}{4}}\pi$.

Úhel tečny t_1 s osou x je $\frac{1}{4}\pi$.

2.2.10 Derivujte funkci $F(x_1, x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) e^{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}}$ $\left(x_1 x_2 \neq 0\right)$ *podle* x_1.

Řešení:

Označíme $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1 x_2$, *potom* $f(y_1, y_2) = y_1 e^{\frac{y_1}{y_2}}$.

$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \left(e^{\frac{y_1}{y_2}} + \frac{y_1}{y_2} e^{\frac{y_1}{y_2}}\right) 2x_1 - \frac{y_1^2}{y_2^2} e^{\frac{y_1}{y_2}} x_2$. Po zpětném dosazení za y_1, y_2 máme $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \underline{\left(2x_1 + \frac{x_1^2}{x_2} - \frac{x_2^3}{x_1^2}\right) e^{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}}}$.

2.2.11 Vypočítejte parciální derivaci podle t složené funkce
$z = a x^2 + 2b x y + c y^2$ v bodě $t = \frac{\pi}{2}$, kde $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Řešení:

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -2(a x + b y)\sin t + 2(b x + c y)\cos t$. Po dosazení za x a y vyjde

$\frac{dz}{dt} = (c - a)\sin 2t + 2b\cos 2t$, $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t = \frac{\pi}{2}} = \underline{-2b}$.

2.2.12 Najděte předpis, podle kterého vypočítáme derivaci funkce jedné proměnné v implicitním tvaru.

Řešení:

Funkci označíme $F(x) = f(x, y) = 0$, *kde* $y = \varphi(x)$. Užijeme pravidla pro derivování složené funkce

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Pokud $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, můžeme lehce vypočítat, že $\frac{dy}{dx} = \underline{-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$.

2.2.13 Vypočítejte parciální derivace druhého řádu funkce
$u = 3x^2\, y + e^{x^2 z} - 3\sin^2 z$.

<u>*Řešení:*</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 2xze^{x^2 z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2\, e^{x^2 z} - 6\sin z\cos z = x^2\, e^{x^2 z} - 3\sin 2z.$$

Tyto derivace mají v E_3 opět parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underline{6y + 2\,ze^{x^2 z} + 4x^2 z^2 e^{x^2 z}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \underline{0},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \underline{x^4\, e^{x^2 z} - 6\,\cos 2z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \underline{6x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \underline{2x\, e^{x^2 z} + 2x^3 z e^{x^2 z}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \underline{0} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

2.2.14 Vypočítejte parciální derivace funkcí

$a)$ $z = xe^{-yx}$,

$b)$ $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

<u>*Řešení:*</u>

$$\frac{dz}{dx} = e^{-yx} - xe^{-yx}\, y = \underline{e^{-yx}(1 - xy)}$$

$$\frac{dz}{dy} = \underline{-x^2\, e^{-yx}}$$

b) $$\frac{dz}{dx} = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = \frac{y(x-y-x)}{(x-y)^2} = \underline{-\frac{y^2}{(x-y)^2}}$$

2.2.15 Proveďte rozbor podle Maclaurinova vzorce pro m = 3 funkce
$f(x,y) = 3x^2 y + \sin^2 x + 5y - 2$.

<u>*Řešení:*</u>

Maclaurinův vzorec pro m = 3 má tvar

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) + \frac{1}{4!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\vartheta x, \vartheta y). \qquad (3)$$

Vypočítáme jednotlivé derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + \sin 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y + 5,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 5,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y + 2\cos 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -4\cos 2x, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y} = 6, \qquad \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3} = 0,$$

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = -8\cos 2x$, ostatní derivace 4. řádu jsou rovny nule. Po dosazení vypočítaných derivací do (3) dostaneme výsledek

$$f(x,y) = \underline{-2 + 5y + x^2 + 3x^2 y - \frac{1}{3}\cos 2\vartheta x}, \quad \vartheta = (0,1).$$