4.1 Řešení základních typů diferenciálních rovnic 1.řádu

4.1.25 Řešte diferenciální rovnici 1. řádu:
$y' + 2y = 0$

Řešení:
Daná rovnice má řešení $y = e^{-2x}$, o čemž se můžeme přesvědčit dosazením za y a $y' = -2e^{-2x}$ do diferenciální rovnice. Rovnici vyhovuje i řešení ve tvaru $y = Ce^{-2x}$, kde C je libovolné číslo, $C \in R_0$. Rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení odpovídajících různým reálným číslům.

4.1.26 Řešte diferenciální rovnici 1. řádu:
$$y' - \sqrt[3]{y^2} = 0 \qquad (1)$$

Řešení:
Rovnice (1) má obecné řešení ve tvaru $\left(\frac{x-C}{3}\right)^3$, o čemž se můžeme přesvědčit dosazením za $y = \left(\frac{x-C}{3}\right)^3$, $y' = \left(\frac{x-C}{3}\right)^2$ do rovnice (1). Řešením je také $y = 0$, které není obsaženo v obecném řešení, jedná se o singulární řešení rovnice (1).

4.1.27 Řešte diferenciální rovnici 1. řádu:
$xy' - 2y = 0$

Řešení: Obecné řešení dané rovnice je $y = Cx^2$, což představuje soustavu integrálních křivek s jedním parametrem.

4.1.28 Těleso o hmotnosti *m* je zavěšeno na pružině. Při vychýlení z rovnovážné polohy ve svislém směru působí na těleso síla *F*, úměrná výchylce *s* a směřujícího do rovnovážné polohy. Současně na těleso při pohybu působí odpor prostředí úměrný rychlosti tělesa. Napište pohybovou rovnici tělesa.

Řešení:
Na těleso působí síla $F = -k_1 s - k_2 v$, kde k_1, k_2 jsou konstanty úměrnosti a $v = \frac{ds}{dt}$ je rychlost tělesa. Užitím Newtonova zákona síly obdržíme

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = -k_1 s - k_2 \frac{ds}{dt}$$

a po úpravě

$$\underline{\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k_1}{m}\frac{ds}{dt} + \frac{k_2}{m}s = 0},$$

což je hledaná pohybová rovnice. Je to diferenciální rovnice druhého řádu.

4.1.29 Je dána jednoparametrická soustava parabol procházející počátkem pomocí $y = Cx^2$. Určete rovnice soustavy ortogonálních trajektorií těchto parabol.

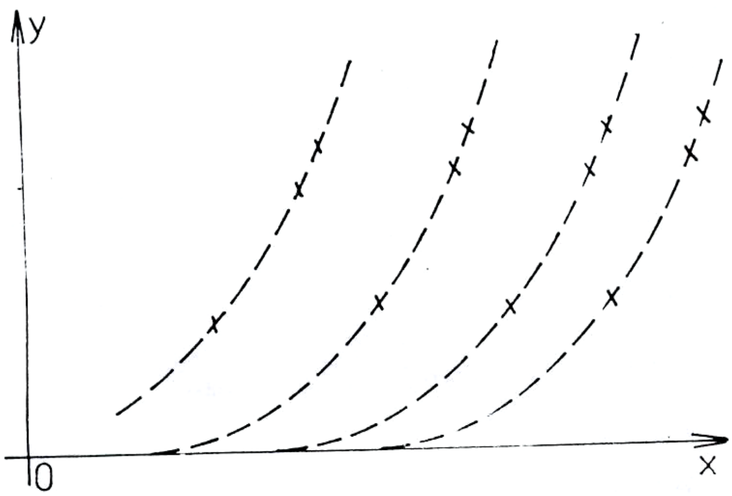
Řešení:
Ortogonální trajektorie jsou křivky, které protínají původní soustavu křivek pod pravým úhlem. Směrnice jejich tečen y'_p, y'_0 ve společném průsečíku musí splňovat vztah

$$y'_0 = -\frac{1}{y'_p}.$$

Stačí tedy nahradit v diferenciální rovnici parabol $xy' - 2y = 0$ směrnici y' směrnicí $-\frac{1}{y'}$, tedy $x\left(-\frac{1}{y'}\right) - 2y = 0$ a obdržíme diferenciální rovnici příslušných trajektorií ve tvaru $2yy' = 0$.

4.1.30 Načrtněte směrové pole diferenciální rovnice
$y' = x - \sqrt{y}$
a určete izokliny.

Řešení:
Funkce $F(x, y) = x - \sqrt{y}$ má $D(f): y \geq 0$. Izokliny jsou větve parabol $y = (x - C)^2, x \geq C$. Grafické znázornění směrového pole a izokliny (čárkovaně) je na obr. 1



obr.1

4.1.31 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice
$x^2 y' + y^2 = 0$.

Řešení:
Separací proměnných obdržíme

$$\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}=0$$

a integrací dostaneme

$$-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=C,$$

Což se dá upravit na tvar $(x+y)=-Cxy$ a položíme-li $-C=c$ dostaneme

$$x+y=cxy;$$

Integrální křivky dané diferenciální rovnice jsou tedy hyperboly procházející počátkem soustavy souřadné pro $c\neq 0$, přímka $x+y=0$ pro $c=0$.

4.1.32 Řešte rovnici

$y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{y}.$

Řešení:

Funkce $p(x)=-\frac{1}{x}, g(x)=1$ jsou spojité pro $x\neq 0$. Zavedeme substituci $z=y^2, z'=2yy'$ do původní rovnice a dostaneme

$$z'-2\frac{z}{x}=2 \qquad (1)$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou. Řešení rovnice (1) bez pravé strany je $z=Cx^2$. Pro získání řešení rovnice s pravou stranou položíme $C=\alpha(x)$ a předpokládané řešení $z=\alpha(x)x^2$ dosadíme do (1). Odtud dostaneme diferenciální rovnici pro $\alpha(x)$ ve tvaru

$$\alpha'(x)x^2=2.$$

Řešení poslední rovnice je $\alpha(x)=-\frac{2}{x}+C$ a tedy $z=Cx^2-2x$ a konečně $\underline{y^2=Cx^2-2x.}$

4.1.33 Ukažte, že funkce

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

je homogenní funkcí nultého stupně na množině $M = E_2 \setminus \{0\}$.

Řešení:

Pro každý bod $[x,y]\in M$ je

$$f(tx,ty)=\frac{t^2x^2-t^2y^2}{t^2x^2+t^2y^2}$$

Po úpravě dostaneme

$$f(tx,ty)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

4.1.34 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2} \qquad (1)$$

Řešení:

Dělíme-li čitatele i jmenovatele pravé strany rovnice (1) výrazem x^2, dostaneme diferenciální rovnici

$$y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}\ . \qquad (2)$$

Pomocí transformace $y=zx$, $y'=z'x+z$ převedeme rovnici (2) na rovnici

$$z'x+z=\frac{z^2}{z-1} \qquad (3)$$

a po separaci proměnných dostaneme za předpokladu, že $z\neq 0$, $x\neq 0$, rovnici

$$\frac{z-1}{z}dz=\frac{dx}{x}\,. \qquad (4)$$

Integrujeme-li rovnici (4), dostaneme $z-\ln|z|=\ln|x|+\ln C$, kde C je kladná konstanta, neboli $\ln e^z-\ln|z|=\ln|x|+\ln C$. Je tedy $e^z=C|xz|$. Poslední rovnici lze zapsat ve tvaru $e^z=\overline{C}xz$, kde $\overline{C}$ je libovolná nenulová konstanta. Dosadíme-li $z=y/x$, dostaneme $e^{yx}=\overline{C}y$. To znamená, že všechny funkce *u,* určené rovnicí

$$e^{u/x}=\overline{C}u\,, \qquad (5)$$

kde $\overline{C}$ je nenulová konstanta, jsou řešením rovnice (1).

Rovnici (4) jsme získali z rovnice (3) za předpokladu, že $z\neq 0, x\neq 0$. Dosazením do rovnice (3) ověříme, že rovnice (3) je splněna i pro $z=0$, tedy rovnice(1) je splněna pro $y=0$. Funkce $u(x)=0$ je však určena implicitně rovnicí (5), zvolíme-li $\overline{C}=0$. Všechna řešení u rovnice (1) jsou tedy určena rovnicí $\underline{e^{u/x}=Ku,}$ kde K je reálná konstanta.

4.1.35 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$xy' - y = \sqrt{(x^2 - y^2)}. \qquad (1)$$

Řešení:

Za předpokladu, že $x \neq 0,$ lze danou rovnici zapsat ve tvaru

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}. \qquad (2)$$

Rovnice (2) je homogenní na oblastech $D_1 = \{[x, y] \mid -\infty < x < 0, -x < y < x\}$ a $D_2 = \{[x, y] | 0 < x < +\infty, -x < y < x\}$. Pomocí transformace $y = zx$ převedeme rovnici (2) na rovnici

$$z'x + z = z + \sqrt{(1 - z^2)}. \qquad (3)$$

Po separaci proměnných dostaneme za předpokladu, že $x \neq 0,\ 1 - z^2 \neq 0,$ rovnici

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \frac{dx}{x}. \qquad (4)$$

Po integraci rovnice (4) dostaneme arsin $z = \ln|Cx|,$ kde C je nenulová konstanta. Dosadíme-li $z = y / x$, dostaneme $\operatorname{arsin}(y / x) = \ln|Cx|$. Všechny funkce $u = x \sin(\ln|Cx|)$ na intervalech $(0, +\infty)$ a $(-\infty, 0)$ přičemž C je nenulová konstanta, jsou tedy řešeními rovnice (1). Rovnici (4) jsme získali z rovnice (3) za předpokladu, že $x \neq 0$ a $1 - z^2$. Dosazením do rovnice (3) ověříme, že rovnice (3) je splněna také pro $z = 1$ a pro $z = -1$, tedy rovnice (1) je splněna pro $y = x$ a pro $y = -x$, $x \neq 0$. To znamená, že funkce $v(x) = x$ a $w(x) = -x$ jsou také řešeními rovnice (1) na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

4.1.36 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$(x + 2y)dx - xdy = 0. \qquad (1)$$

Řešení:

Za předpokladu, že $x \neq 0,$ upravíme rovnici (1) na tvar

$$y' = 1 + 2\frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Dosazením $x = 0,\ dx = 0$ do rovnice (1) ověříme, že rovnice(1) je splněna, a tedy funkce $u(y) = 0, y \in \mathbf{R}$, je řešením rovnice (1).

Pomocí transformace $y = zx$ převedeme rovnici (2) na rovnici

$$z'x + z = 1 + 2z. \qquad (3)$$

Po separaci proměnných v rovnici (3) dostaneme za předpokladu, že $x \neq 0,\ z \neq -1,$ rovnici

$$\frac{dz}{1 + z} = \frac{dx}{x}, \qquad (4)$$

a tedy po integraci je $\ln|1+z| = \ln|Cx|$ neboli $1+z = Cx$, kde C je nenulová konstanta. Dosadíme-li $z = y/x$, dostaneme $y = Cx^2 - x$. To znamená, že funkce $v(x) = Cx^2 - x$, kde C je nenulová konstanta,jsou řešeními rovnice(1) na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Rovnici (4) jsme získali z rovnice(3) za předpokladu, že $x \neq 0$, $z \neq -1$. Dosazením do rovnice (3) ověříme, že $z = -1$ splňuje rovnici (3), tedy rovnice (2) je splněna pro $y = -x$, $x \neq 0$, a rovnice (1) pro $y = -x$, $x \in \mathbf{R}$. To znamená, že funkce $w(x) = -x$ je řešením rovnice (1) na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Funkce w je však totožná s funkcí v, zvolíme-li $C = 0$. Proto funkce $v(x) = Cx^2 - x$, $x \in \mathbf{R}$ (C je libovolná konstanta), $u(y) = 0, y \in \mathbf{R}$, představují všechna řešení dané rovnice.

4.1.37 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}. \tag{1}$$

<u>*Řešení:*</u>

Nejdříve řešíme soustavu rovnic

$$-7x + 3y + 7 = 0,$$
$$3x - 7y - 3 = 0.$$

Determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} -7, 3 \\ 3, -7 \end{vmatrix} = 40$$

se nerovná nule; soustava má právě jedno řešení:

$$x_0 = \frac{1}{40}\begin{vmatrix} -7, 3 \\ 3, -7 \end{vmatrix} = 1, \quad y_0 = \frac{1}{40}\begin{vmatrix} -7, 3 \\ 3, -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomocí transformace $x = \xi + 1, y = \eta$ převedeme rovnici (1) na tvar

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3\eta - 7\xi}{3\xi - 7\eta} \text{ neboli } \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3\frac{\eta}{\xi} - 7}{3 - 7\frac{\eta}{\xi}}. \tag{2}$$

Rovnice(2) je homogenní. Zvolíme-li $z = \eta/\xi$, dostaneme

$$\xi\frac{dz}{d\xi} + z = \frac{3z - 7}{3 - 7z}$$

a po úpravě

$$\frac{7z - 3}{7(z^2 - 1)}dz + \frac{d\xi}{\xi} = 0 \tag{3}$$

za předpokladu $z^2 - 1 \neq 0$ a $\xi \neq 0.$ Po integraci rovnice (3) dostaneme rovnici $(z-1)^2 (z+1)^5 \xi^7 = C,$ kde C je nenulová konstanta. Po dosazení $z = y/(x-1)$ a po úpravě dostaneme

$$(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = K,$$

kde K je nenulová konstanta.

Při separaci proměnných jsme předpokládali, že $z^2 - 1$ neboli $(y - x + 1).(y+x-1)$ se nerovná nule. Dosazením $y = x - 1$, resp. $Y = -x + 1$ do dané rovnice (1) ověříme, že rovnice (1) je splněna. Tento případ však lze zahrnout do vztahu (4), budeme-li uvažovat, že také $K = 0.$ Řešeními dané rovnice jsou tedy funkce $u,$ určené implicitně rovnicí $(u - x + 1)^2 (u + x - 1)^5 = K,$ kde K je reálná konstanta.

4.1.38 Určete integrální křivku diferenciální rovnice

$$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy, \qquad (1)$$

procházející bodem $P[0,-2].$

<u>*Řešení:*</u>

Rovnice (1) má konstantní řešení $u(x) = -2, x \in \mathbf{R},$ a toto řešení splňuje počáteční podmínku $u(0) = -2.$ Hledaná integrální křivka je tedy přímka s rovnicí $y = -2.$ Protože jsou v bodě P splněny podmínky věty o existenci a jednoznačnosti řešení, prochází tímto bodem právě jedna integrální křivka rovnice (1).

4.1.39 Určete integrální křivku diferenciální rovnice

$$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy\,, \qquad (1)$$

procházející bodem $M[5,0].$

<u>*Řešení:*</u>

Rovnici (1) převedeme na homogenní rovnici pomocí transformace $x = \xi + x_0, y = \eta + y_0,$ kde (x_0, y_0) je řešení soustavy rovnic

$$y + 2 = 0,$$
$$2x + y - 4 = 0,$$

tedy $x_0 = 3, y_0 = -2.$

Dostaneme diferenciální rovnici

$$\eta d\xi = (2\xi + \eta)d\eta,$$

kterou upravíme na tvar

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 5\frac{\xi}{\eta} + 1. \qquad (2)$$

Zvolíme-li $\xi / \eta = z$, je

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{dz}{d\eta}\eta + z.$$

Pak po dosazení do rovnice (2) dostaneme

$$\frac{dz}{d\eta}\eta = z + 1.$$

Separujeme-li proměnné, je

$$\frac{dz}{z+1} = \frac{d\eta}{\eta} \tag{3}$$

za předpokladu, že $z + 1 \neq 0$ a $\eta \neq 0$. Po integraci rovnice (3) je $\ln|z+1| = \ln|\eta| + \ln C$, kde C je kladná konstanta, neboli $z + 1 = K\eta$, kde K je nenulová reálná konstanta. Dosadíme-li $z = (x-3)/(y+2), \eta = y + 2$, dostaneme

$$y + x - 1 = K\left(y + 2^2\right), \;\; y \neq -2. \tag{4}$$

Ze soustavy křivek o rovnici (4) s parametrem K najdeme integrální křivku procházející bodem *M.* Musí platit $0 + 5 - 1 = K(0+2)^2$, tedy K = 1. Hledaná integrální křivka je parabolou s rovnicí $x = y^2 + 3y + 5$. Protože v bodě M jsou splněny podmínky věty o existenci a jednoznačnosti řešení, je to jediná integrální křivka rovnice (1), procházející tímto bodem.

4.1.40 $F(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ je homogenní funkcí stupně 2, neboť platí pro $t \neq 0$
$F(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - txty = t^2\left(x^2 + y^2 - xy\right) = t^2 F(x,y).$

4.1.41 Řešte diferenciální rovnici
$y^2 + \left(x^2 - xy\right)y' = 0$

Řešení:

Rovnice je homogenní, neboť $P(x,y) = y^2$ a $G(x,y) = x^2 - xy$ jsou homogenní funkce. Lze tedy zavést substituci $y = xu$

$$(xu)^2 + \left(x^2 - x^2u\right)(u + xu') = 0$$

a odtud

$$u + (1-u)xu' = 0\,. \tag{1}$$

Separací proměnných obdržíme rovnici

$$\frac{1}{x}dx - \frac{u-1}{u}du = 0. \tag{2}$$

Integrací (1) vychází

$$\ln|x| + \ln|u| - u = \ln c, \quad c > 0$$

(kde jsme položili na pravé straně $C = \ln c$). Tedy

$$\underline{y = ce^{\frac{y}{x}}.}$$

Rovnici (1) vyhovuje také řešení $\underline{u = 0,}$ pro které $\underline{y = 0.}$