4.2 Řešení diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty

4.2.1 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Řešení:
Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$.
Funkce $u_1(x) = e^{2x}$; $u_2(x) = e^{3x}$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:
$\underline{u(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$; $x \in R$; kde C_1 a C_2 jsou konstanty.

4.2.2 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Řešení:
Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = 2 + 3i$; $\lambda_2 = 2 - 3i$.
Funkce $u_1(x) = e^{2x}\cos(3x)$; $u_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:
$\underline{u(x) = e^{2x}\left[C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right]}$; $x \in R$; kde C_1 a C_2 jsou konstanty.

4.2.3 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Řešení:
Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda = -3$.
Funkce $u_1(x) = e^{-3x}$; $u_2(x) = xe^{-3x}$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice na intervalu $(-\infty, +\infty)$ a všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:
$\underline{u(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}}$; $x \in R$; kde C_1 a C_2 jsou konstanty.

4.2.4 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y^{(IV)} - 16y = 0$$

Řešení:
Charakteristická rovnice $\lambda^4 - 16 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 2i$; $\lambda_4 = -2i$.
Fundamentální systém řešení dané rovnice je na intervalu $(-\infty, +\infty)$ reprezentován funkcemi:
$u_1(x) = e^{2x}$; $u_2(x) = e^{-2x}$; $u_3(x) = \cos(2x)$; $u_4(x) = \sin(2x)$
Všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:
$\underline{u(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x)}$; $x \in R$; kde C_1 ,C_2 ,C_3 a C_4 jsou konstanty.

4.2.5 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'''-3y''+3y'-y=0$$

<u>*Řešení:*</u>

Charakteristická rovnice $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ má trojnásobný kořen $\lambda=1$.
Fundamentální systém řešení dané rovnice je na intervalu $(-\infty,+\infty)$ reprezentován funkcemi:
$u_1(x)=e^x$; $u_2(x)=xe^x$; $u_3(x)=x^2e^x$.
Všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:

$$\underline{u(x)=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^x} \quad ; \; x\in R ; \text{ kde } C_1, C_2 \text{ a } C_3 \text{ jsou konstanty.}$$

4.2.6 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$4y''-8y'+5y=0$$

<u>*Řešení:*</u>

Charakteristická rovnice $4\lambda^2-8\lambda+5=0$ má komplexně sdružené kořeny
$\lambda_1=1+\frac{1}{2}i$; $\lambda_2=1-\frac{1}{2}i$.
Funkce $u_1(x)=e^x\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$; $u_2(x)=e^x\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice na intervalu $(-\infty,+\infty)$ a všechna řešení dané rovnice jsou určena rovnicí:

$$\underline{u(x)=e^x\left[C_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+C_2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]} ; \; x\in R ; \text{ kde } C_1 \text{ a } C_2 \text{ jsou konstanty.}$$

4.2.7 Určete řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y'''-8y=0$$

při počátečních podmínkách $y(0)=0$; $y'(0)=6$; $y''(0)=0$.

<u>*Řešení:*</u>

Nejdříve určíme obecné řešení dané rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^3-8=0$ má kořeny
$\lambda_1=2$; $\lambda_2=-1+i\sqrt{3}$; $\lambda_3=-1-i\sqrt{3}$.
Obecné řešení dané rovnice je určeno rovnicí
$y(x)=C_1e^{2x}+e^{-x}\left[C_2\cos(x\sqrt{3})+C_3\sin(x\sqrt{3})\right]$; $x\in R$
Konstanty C_1, C_2, C_3 určíme z daných počátečních podmínek:

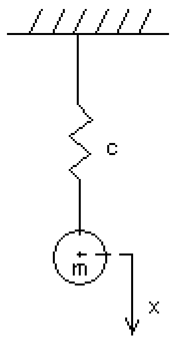
$$\begin{aligned}
y(0)&=C_1+C_2 &&=0\\
y'(0)&=2C_1-C_2+\sqrt{3}C_3 &&=6\\
y''(0)&=4C_1-2C_2-2\sqrt{3}C_3 &&=0
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy algebraických rovnic je trojice čísel $C_1=1$, $C_2=-1$, $C_3=\sqrt{3}$.
Řešením dané úlohy je tedy funkce: $\underline{u(x)=e^{2x}+e^{-x}\left[\sqrt{3}\sin(x\sqrt{3})-\cos(x\sqrt{3})\right]}$; $x\in R$

4.2.8 Netlumené kmity hmotného bodu jsou popsány diferenciální rovnicí

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

(obr. 1). V okamžiku *t = 0* je výchylka hmotného bodu z rovnovážné polohy rovna nule a velikost rychlosti pohybu se rovná jedné. Určete výchylku hmotného bodu a velikost rychlosti pohybu v okamžiku *t = 1*.



Obr.1

Řešení:

Závislost výchylky *x(t)* na čase určíme řešením Cauchyovy úlohy pro danou rovnici při počátečních podmínkách $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$.

Charakteristická rovnice $m\lambda^2 + c = 0$ má komplexně sdružené kořeny

$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{c}{m}}$, neboť *c > 0, m > 0.* Obecné řešení dané rovnice je určeno rovnicí:

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{\frac{c}{m}}\right)$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z daných počátečních podmínek:

$$x(0) = C_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = \left(\sqrt{\frac{c}{m}}\right)C \quad = 1$$

Řešením Cauchyovy úlohy je funkce $x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ je frekvence vlastních kmitů. Výchylku hmotného bodu s hmotností *m* v okamžiku *t = 1* určíme dosazením do řešení Cauchyovy úlohy. Dostaneme tedy: $x(1) = \frac{1}{\omega}\sin\omega$. Protože $\dot{x}(t) = \cos(\omega t)$, je velikost rychlosti pohybu hmotného bodu v okamžiku *t = 1* rovna *cos ω*.

4.2.9 Určete amplitudu a počáteční fázi tlumených kmitů hmotného bodu, které jsou popsány diferenciální rovnicí

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

a počátečními podmínkami $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ má komplexně sdružené kořeny

$\lambda_1 = -1 + 2i$; $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Obecné řešení dané rovnice je určeno rovnicí:

$$x(t) = e^{-t}\left[C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)\right], t \in R$$

Konstanty C_1 a C_2 určíme z daných počátečních podmínek:
$x(0) = C_1 = 1$
$\dot{x}(0) = e^{-t}\left[(2C_2 - C_1)\cos(2t) - (2C_1 + C_2)\sin(2t)\right]_{t=0} = 2C_2 - C_1 = 0$

Tedy $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$ a závislost výchylky x na čase t je popsána funkcí

$x(t) = e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$

Abychom mohli určit amplitudu a počáteční fázi kmitů, zapíšeme výraz $\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$ ve tvaru $A[\sin\varphi_0 \cos(2t) + \cos\varphi_0 \sin(2t)] = A\sin(2t + \varphi_0)$. Umocníme-li tyto rovnice, dostaneme po sečtení $A^2 = \frac{5}{4}$, tedy $A = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Dále plyne z uvedené soustavy rovnic, že $tg\varphi_0 = 2$, takže $\varphi_0 = arctg2$.

Kmitání uvažovaného systému je tedy popsáno funkcí: $\underline{x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}\sin(2t + arctg2)}$,

počáteční fáze kmitů je $\varphi_0 = arctg2$ a amplituda kmitů je $\frac{1}{2}(\sqrt{5})e^{-t}$.

4.2.10 Určete řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

při počátečních podmínkách y(-1) = 0 , y´(-1) = 1.

__Řešení:__
Zadaná rovnice je Eulerovou rovnicí a lze ji transformovat na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty pomocí substituce $|x| = e^t$ .Protože $x_0 = -1$, je $x_0 \in (-\infty, 0)$ a tedy je $|x| = -x$.

Dosadíme-li do zadané rovnice $y' = -\frac{1}{x}\dot{y}$, $y'' = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} + \dot{y})$, dostaneme rovnici $\ddot{y} + \dot{y} = 0$.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = i$; $\lambda_2 = -i$.
Obecným řešením této rovnice je funkce $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$,
funkce $y(x) = C_1 \cos[\ln(-x)] + C_2 \sin[\ln(-x)]$ je řešením původní rovnice na intervalu $(-\infty, 0)$.
Konstanty C_1 a C_2 určíme z daných počátečních podmínek:
$y(-1) = C_1 = 0$
$y'(-1) = C_1 \frac{1}{x}\sin[\ln(-x)] - C_2 \frac{1}{x}\cos[\ln(-x)]\Big|_{x=-1} = C_2 = 1$
Řešením dané úlohy je tedy funkce: $\underline{u(x) = \sin[\ln(-x)]}$; $x \in (-\infty, 0)$

4.2.11 Určete řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

při počátečních podmínkách $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$.

__Řešení:__

Zadaná rovnice je Eulerovou rovnicí a protože $x_0 = 1$, je $x_0 \in (0,+\infty)$, zvolíme tedy substituci $x = e^t$. Dosadíme-li do zadané rovnice $y' = \frac{1}{x}\dot{y}$, $y'' = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y})$, dostaneme rovnici $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ má reálné kořeny $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 2$.

Obecným řešením této rovnice je funkce $y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$, funkce $y(x) = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 x^2$ je řešením původní rovnice na intervalu $(0,+\infty)$.

Konstanty C_1 a C_2 určíme z daných počátečních podmínek:

$y(1) = C_1 + C_2 = 0$

$y'(1) = -3C_1 \frac{1}{x^4} + 2C_2 x \Big|_{x=1} = -3C_1 + 2C_2 = 1$

Řešením dané soustavy je dvojice čísel $C_1 = -\frac{1}{5}$, $C_2 = \frac{1}{5}$

Řešením dané úlohy je tedy funkce: $\underline{u(x) = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)}$; $x \in (0,+\infty)$

4.2.12 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{2}{x} y' + 4y = 0$$

Řešení:

Daná rovnice je na intervalech $(-\infty,0)$ *a* $(0,+\infty)$ ekvivalentní s rovnicí $xy'' + 2y' + 4xy = 0$, kterou lze psát ve tvaru $(xy)'' + 4xy = 0$. Tuto rovnici převedeme na rovnici s konstantními koeficienty pomocí substituce $z = xy$. Dostaneme rovnici $z'' + 4z = 0$.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ a tedy obecné řešení lze psát ve tvaru $z(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$, $x \in R$.

Řešením původní rovnice je tedy funkce $\underline{y(x) = C_1 \frac{\cos(2x)}{x} + C_2 \frac{\sin(52x)}{x}}$ definovaná na intervalech $(-\infty,0)$ *a* $(0,+\infty)$.

4.2.13 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$$

při počátečních podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Řešení:

Označíme-li $y' = z$, lze danou rovnici psát ve tvaru $(1 + x^2)z' - 2xz = 0$. Po separaci proměnných v této rovnici dostaneme rovnici $\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1 + x^2}dx$, jejímž řešením je funkce $z = C_1(1 + x^2)$ a tedy $y' = C_1(1 + x^2)$. Po integraci dostaneme obecné řešení původní rovnice $y(x) = C_1\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + C_2$, $x \in R$. Konstanty C_1 a C_2 určíme z daných počátečních podmínek:

$y(0) = C_2 = 1$

$y'(0) = C_1(1+x^2)\Big|_{x=0} = C_1 = 3$

Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce $\underline{u(x) = x^3 + 3x + 1}$, $x \in R$.

4.2.14 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y = 0$$

Řešení:

Abychom mohli snížit řád dané diferenciální rovnice, potřebujeme nějakým způsobem „uhádnout“ jedno její řešení. To je možné např. v případě, že tímto řešením je polynom nebo exponenciální funkce. Nejdříve zjistíme, zda daná rovnice nemá řešení ve tvaru $u(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots$

Dosadíme $u(x)$, $u'(x) = nx^{n-1} + \ldots$, $u''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ po řadě za y, y′,a y′′ do dané rovnice (zapíšeme jen mocniny se základem *x* nejvyššího stupně) a položíme koeficient u mocniny nejvyššího stupně roven nule: $n(n-1) - 2n + 2 = 0$

Tato rovnice má dva celočíselné kladné kořeny $n = 1$ a $n = 2$.

Původní rovnice má tedy dvě řešení ve tvaru $u_1(x) = x + b_1$, $u_2(x) = x^2 + b_2x + b_3$.

Po dosazení u_1, $u_1' = 1$, $u_1'' = 0$ po řadě za y , y′, y′′ do původní rovnice dostaneme $-2x + 2x + 2b_1 = 0$ a tedy $b_1 = 0$. Funkce $u_1(x) = x$ je partikulárním řešením původní rovnice.

Podobně po dosazení u_2, $u_2' = 2x + b_2$, $u_2'' = 2$ po řadě za y , y′, y′′ do původní rovnice dostaneme $2 - 2b_2x + 2b_2x + 2b_3 = 0$. Tedy číslo b_2 je libovolné a $b_3 = -1$ .Zvolíme-li $b_2 = 0$, dostaneme druhé partikulární řešení $u_2(x) = x^2 - 1$ původní rovnice.

Ukážeme, že funkce u_1, u_2 tvoří fundamentální systém řešení původní rovnice na intervalu $(-\infty,+\infty)$:

Wronskián $W(x) = \begin{vmatrix} x\,, & x^2-1 \\ 1\,, & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 1$ je různý od nuly na intervalu $(-\infty,+\infty)$. Protože jsme dostali dvě lineárně nezávislá řešení u_1, u_2 původní rovnice, je funkce $\underline{v(x) = C_1x + C_2(x^2-1)}$, $x \in R$ obecným řešením původní rovnice.

4.2.15 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$(x-1)y''-xy'+y = 0$$

Řešení:

Nejdříve zjistíme, zda daná rovnice nemá řešení ve tvaru polynomu

$u(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots$

Dosadíme $u(x)$, $u'(x) = nx^{n-1} + \ldots$, $u''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ po řadě za y, y′,a y′′ do dané rovnice (zapíšeme jen mocniny se základem *x* nejvyššího stupně) a položíme koeficient u mocniny nejvyššího stupně roven nule: $n^2 - 2n + 1 = 0$

Tato rovnice má dvojnásobný kořen $n = 1$. Hledáme tedy partikulární řešení ve tvaru $u_1(x) = x + b$.

Po dosazení do původní rovnice určíme $b = 0$. Dále zjistíme, zda má původní rovnice další řešení ve tvaru $u_2(x) = e^{ax}$. Po dosazení u_2, $u_2' = a\,e^{ax}$, $u_2'' = a^2e^{ax}$ po řadě za y , y´, y´´ do původní rovnice dostaneme rovnici $a(a-1)x+1-a^2=0$.Tato rovnice je splněna pro libovolné číslo *x* z intervalu $(1,+\infty)$ resp. $(-\infty,1)$, je-li *a = 1* .

Funkce $u_1(x)=x$, $u_2(x)=e^x$ tvoří fundamentální systém řešení původní rovnice na intervalech $(1,+\infty)$ *a* $(-\infty,1)$, neboť wronskián

$W(x)=\begin{vmatrix} x\,, & e^x \\ 1\,, & e^x \end{vmatrix}=e^x(x-1)$ je různý od nuly na těchto intervalech.

Funkce $\underline{u(x)=C_1x+C_2e^x}$ je tedy obecným řešením původní rovnice na intervalech $(1,+\infty)$ *a* $(-\infty,1)$.

4.2.16 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici

$$y''-\frac{2}{x^2}y=0$$

při počátečních podmínkách $y(1)=0$, $y'(1)=3$.

Řešení:

Nejdříve zjistíme, zda daná rovnice nemá řešení ve tvaru polynomu $u(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots$ Dosadíme $u(x)$, $u'(x)=nx^{n-1}+\ldots$, $u''(x)=n(n-1)x^{n-2}+\ldots$ po řadě za y, y´,a y´´ do dané rovnice (zapíšeme jen mocniny se základem *x* nejvyššího stupně) a položíme koeficient u mocniny nejvyššího stupně roven nule: $n^2-n-2=0$.

Tato rovnice má kořeny $n_1 = 2$ *a* $n_2 = -1$. Původní rovnice má tedy partikulární řešení ve tvaru $u_1(x)=x^2+b_1x+b_2$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme podmínku $b_1x+b_2=0$. Musí tedy být $b_1=b_2=0$.

Původní rovnice má tedy partikulární řešení $u_1(x)=x^2$. Dále zjistíme, zda má původní rovnice další řešení ve tvaru $u_2(x)=e^{ax}$. Po dosazení u_2, $u_2'=a\,e^{ax}$, $u_2''=a^2e^{ax}$ po řadě za y , y´, y´´ do původní rovnice dostaneme rovnici $a^2x^2-2=0$, která není splněna nezávisle na proměnné *x* pro žádné číslo *a.* Abychom získali další partikulární řešení, snížíme řád původní rovnice pomocí substituce $y=x^2z$.

Po dosazení $y=x^2z$, $y'=2xz+x^2z'$, $y''=2z+4xz'+x^2z''$ do původní rovnice dostaneme rovnici $x^2z''+4xz'=0$.

Po substituci $z'=v$ a po separaci proměnných je $\frac{dv}{v}=-\frac{4}{x}dx$, tedy $v=z'=\frac{C_1}{x^4}$.

Po integraci dostaneme $z=-\frac{C_1}{3x^3}+C_2$ a zvolíme-li integrační konstanty $C_1 = -3$, $C_2 = 0$, dostaneme partikulární řešení $u_2(x)=x^2z=\frac{1}{x}$.

Funkce u_1 , u_2 tvoří fundamentální systém řešení původní rovnice na intervalu $(0,+\infty)$, neboť wronskián $W(x)=\begin{vmatrix} x^2\,, & \frac{1}{x} \\ 2x\,, & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}=-3$ je různý od nuly. Obecné řešení původní rovnice lze tedy psát ve tvaru $y(x)=C_1x^2+C_2\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Konstanty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek:

$y(1) = C_1 + C_2 = 0$

$y'(1) = 2C_1 x - \left.\frac{C_2}{x^2}\right|_{x=1} = 2C_1 - C_2 = 3$

Řešením této soustavy je dvojice čísel $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Řešením dané úlohy je funkce $\underline{u(x) = x^2 - \frac{1}{x}}$, $x \in (0,+\infty)$.

4.2.17 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

při počátečních podmínkách $y(1) = e$, $y'(1) = 5e$.

<u>*Řešení:*</u>

Nejdříve zjistíme, zda daná rovnice nemá řešení ve tvaru polynomu $u_1(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots$ Po dosazení do dané rovnice zjistíme, že koeficient u mocniny nejvyššího stupně je roven jedné, a není tedy pro žádné nezáporné číslo n roven nule.Daná rovnice nemůže mít tedy řešení ve tvaru polynomu.

Dále zjistíme, zda exponenciální funkce $v(x) = e^{ax}$ je pro nějaké reálné číslo a partikulárním řešením dané rovnice. Po dosazení $v = e^{ax}$, $v' = a\, e^{ax}$, $v'' = a^2 e^{ax}$ po řadě za y , y′, y′′ do původní rovnice dostaneme podmínku $(a-1)^2 x + 1 - a = 0$, která je pro všechna čísla $x \in (0,+\infty)$, právě když je $a = 1$.

Funkce $v_1(x) = e^x$ je partikulárním řešením dané rovnice na intervalu $(0,+\infty)$.

Další partikulární řešení určíme pomocí snížení řádu původní rovnice pomocí substituce $y = e^x z$. Po dosazení $y = e^x z$, $y' = e^x (z + z')$, $y'' = e^x (z + 2z' + z'')$ do původní rovnice dostaneme rovnici $xz'' - z' = 0$. Po substituci $z' = w$ lze tuto rovnici řešit pomocí separace proměnných, dostaneme řešení $w(x) = C_1 x$ a tedy řešením předešlé rovnice jsou všechny funkce $z(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ a zvolíme-li integrační konstanty $C_1 = 2$, $C_2 = 0$, dostaneme partikulární řešení původní rovnice na intervalu $(0,+\infty)$ ve tvaru: $v_2(x) = z(x)e^x = x^2 e^x$.

Obecné řešení zadané rovnice má tvar $y(x) = \left(C_1 + C_2 x^2\right)e^x$, $x \in (0,+\infty)$.

Konstanty C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek:

$y(1) = \left(C_1 + C_2\right)e = e$

$y'(1) = \left.\left[C_1 + C_2\left(2x + x^2\right)\right]e^x\right|_{x=1} = \left(C_1 + 3C_2\right)e = 5e$

Řešením této soustavy je dvojice čísel $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce $\underline{u(x) = (2x-1)e^x}$, $x \in (0,+\infty)$.