4.2 Řešení diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty

4.2.18 Určete všechna řešení nehomogenní Eulerovy rovnice

$$x^2 y'' + xy' + y = x$$

na intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení:

Fundamentální systém řešení rovnice $x^2 y'' + xy' + y = 0$ na intervalu $(-\infty,0)$ byl sestrojen v předešlé kapitole. Je reprezentován funkcemi $u_1(x) = \cos[\ln(-x)]$, $u_2(x) = \sin[\ln(-x)]$.

Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru $v(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$, kde

$$v_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx\,,\quad v_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos[\ln(-x)], & \sin[\ln(-x)] \\ \frac{1}{x}\sin[\ln(-x)], & -\frac{1}{x}\cos[\ln(-x)] \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0\,, & \sin[\ln(-x)] \\ x\,, & -\frac{1}{x}\cos[\ln(-x)] \end{vmatrix} = -x\sin[\ln(-x)]$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos[\ln(-x)], & 0 \\ \frac{1}{x}\sin[\ln(-x)], & x \end{vmatrix} = x\cos[\ln(-x)]$$

Obecným řešením původní rovnice na intervalu $(-\infty,0)$ je funkce

$$\underline{u(x) = C_1\cos[\ln(-x)] + C_2\sin[\ln(-x)] + \left(\cos[\ln(-x)]\int x^2\sin[\ln(-x)]dx\right) - \left(\sin[\ln(-x)]\int x^2\cos[\ln(-x)]dx\right)}$$

4.2.19 Určete všechna řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$$

na intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení:

Fundamentální systém řešení rovnice $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$ byl sestrojen v předešlé kapitole v příkladu 5. Je reprezentován funkcemi

$u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = xe^x$, $u_3(x) = x^2e^x$.

Obecné řešení u zadané rovnice má tvar $u(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^x + v(x)$, kde *v(x)* je partikulární řešení zadané rovnice, které určíme metodou variace konstant.

Řešení v hledáme ve tvaru $v = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$, kde

$$v_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx\,,\quad v_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx\,,\quad v_3(x) = \int \frac{W_3(x)}{W(x)}dx$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x\,, & xe^x\,, & x^2e^x \\ e^x\,, & (x+1)e^x\,, & (x^2+2x)e^x \\ e^x\,, & (x+2)e^x\,, & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1\,, & x\,, & x^2 \\ 0\,, & 1\,, & 2x \\ 0 & 2\,, & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1\,, & x\,, & x^2 \\ 0\,, & 1\,, & 2x \\ 0\,, & 0\,, & x \end{vmatrix} = 2e^{3x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0, & xe^x, & x^2e^x \\ 0, & (x+1)e^x, & (x^2+2x)e^x \\ e^x, & (x+2)e^x, & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} x, & x^2 \\ 1, & 2x \end{vmatrix} = x^2e^{3x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x, & 0, & x^2e^x \\ e^x, & 0, & (x^2+2x)e^x \\ e^x, & e^x, & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}\begin{vmatrix} 1, & x^2 \\ 0, & 2x \end{vmatrix} = -2xe^{3x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} e^x, & xe^x, & 0 \\ e^x, & (x+1)e^x, & 0 \\ e^x, & (x+2)e^x, & e^x \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1, & x \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = e^{3x}$$

Po integraci dostaneme: $v_1(x) = \frac{x^3}{6}$, $v_2(x) = -\frac{x^2}{2}$, $v_3(x) = \frac{1}{2}x$ (zvolili jsme integrační konstanty rovny nule) a tedy $v(x) = \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^3}{2}e^x + \frac{x^3}{2}e^x = \frac{x^3}{6}e^x$.

Obecným řešením původní rovnice je funkce $\underline{u(x) = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^x + \frac{x^3}{6}e^x}$, $x \in R$.

4.2.20 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3x)}$$

při počátečních podmínkách $y\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{6}\pi$.

<u>Řešení:</u>

Fundamentální systém řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x) = \cos(3x)$, $u_2(x) = \sin(3x)$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Pravá strana zadané rovnice je definovaná a spojitá na intervalech, které neobsahují body $x = \frac{1}{3}k\pi$, kde k je celé číslo. Pro počáteční hodnotu $x_0 = \frac{1}{6}\pi$ tedy existuje právě jedno řešení w Cauchyovy úlohy a lze je prodloužit na interval $(0, \frac{1}{3}\pi)$. Řešení w hledáme ve tvaru

$w(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + v(x)$, $x \in (0, \frac{1}{3}\pi)$.

Konstanty C_1, C_2 určíme z daných počátečních podmínek a funkci v určíme ve tvaru:
$v(x) = v_1(x)\cos(3x) + v_2(x)\sin(3x)$, kde
$v_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx$, $v_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(3x), & \sin(3x) \\ -3\sin(3x), & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3$$

$$W_1(x)=\begin{vmatrix} 0\,, & \sin(3x) \\ \dfrac{1}{\sin(3x)}\,, & 3\cos(3x)\end{vmatrix}=-1$$

$$W_2(x)=\begin{vmatrix} \cos(3x)\,, & 0 \\ -3\sin(3x)\,, & \dfrac{1}{\sin(3x)}\end{vmatrix}=\cot g(3x)$$

Po integraci dostaneme: $v_1(x)=-\frac{1}{3}\int dx=-\frac{1}{3}x$, $v_2(x)=\frac{1}{3}\int \cot g(3x)dx=\frac{1}{9}\ln\left|\sin(3x)\right|$

(zvolili jsme integrační konstanty rovny nule) a tedy

$v(x)=-\frac{1}{3}x\cos(3x)+\frac{1}{9}[\sin(3x)]\ln[\sin(3x)]$, $x\in(0,\frac{1}{3}\pi)$.

Řešení dané úlohy má pak tvar $w(x)=\left(C_1-\frac{x}{3}\right)\cos(3x)+\left\{C_2+\frac{1}{9}\ln[\sin(3x)]\right\}\sin(3x)$.

Konstanty C_1 , C_2 určíme z počátečních podmínek:

$$w\left(\frac{\pi}{6}\right)=C_2=1$$

$$w'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\left(C_1-\frac{x}{3}\right)\sin(3x)+3\left\{C_2+\frac{1}{9}\ln[\sin(3x)]\right\}\cos(3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-3C_1+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

Je tedy $C_1=0$, $C_2=1$. Řešením Cauchyovy úlohy je funkce

$w(x)=-\frac{x}{3}\cos(3x)+\left\{1+\frac{1}{9}\ln[\sin(3x)]\right\}\sin(3x)$, $x\in(0,\frac{1}{3}\pi)$.

4.2.21 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=(x^2+1)^2$$

při počátečních podmínkách $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Řešení:

Fundamentální systém řešení homogenní rovnice $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x)=x$, $u_2(x)=x^2-1$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$ (viz příklad 14). Pravá strana zadané rovnice je definovaná a spojitá na intervalu $(-\infty,+\infty)$. Existuje tedy právě jedno řešení *w* Cauchyovy úlohy a lze je prodloužit na interval $(-\infty,+\infty)$.

Zadanou rovnici upravíme, aby koeficient u y'' byl roven jedné:

$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2y}{x^2+1}=x^2+1$ Řešení *w* hledáme metodou variace konstant ve tvaru

$w(x)=C_1x+C_2(x^2-1)+v(x)$, $x\in R$.

Konstanty C_1 , C_2 určíme z daných počátečních podmínek a funkci *v* určíme ve tvaru:

$v(x)=xv_1(x)+(x^2-1)v_2(x)$, kde

$$v_1(x)=\int\frac{W_1(x)}{W(x)}dx\,,\quad v_2(x)=\int\frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} x\,, & x^2-1 \\ 1\,, & 2x\end{vmatrix}=x^2+1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0\,, & x^2-1 \\ x^2+1\,, & 2x \end{vmatrix} = (1-x^2)(x^2+1)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x\,, & 0 \\ 1\,, & x^2+1 \end{vmatrix} = x(x^2+1)$$

Po integraci dostaneme: $v_1(x) = \int (1-x^2)dx = x - \frac{x^3}{3}$, $v_2(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$ (zvolili jsme integrační konstanty rovny nule) a tedy $v(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}$.

Konstanty C_1 , C_2 určíme z počátečních podmínek:

$$w(0) = C_1 x + C_2(x^2-1) + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=0} = -C_2 = 0$$

$$w'(0) = C_1 + 2C_2 x + \frac{2}{3}x^3 + x \Big|_{x=0} = C_1 = 1$$

Řešením Cauchyovy úlohy je funkce $\underline{w(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x}$.

4.2.22 Určete tvar partikulárního řešení rovnice

$$y^{(IV)} + 2y''' - 3y'' = f(x)\,,$$

jestliže

a.) $f(x) = xe^{-x}$

b.) $f(x) = 1$

c.) $f(x) = (x^2+1)e^{-3x}$

Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ homogenní diferenciální rovnice $y^{(IV)} + 2y''' - 3y'' = 0$ má kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$.

a.) $P_k(x) = x$, $k = 1$, $b = -1$. Protože číslo $b = -1$ není kořenem předešlé rovnice, má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = (A_0 + A_1 x)e^{-x}}$

b.) $P_k(x) = 1$, $k = 0$, $b = 0$. Protože číslo $b = 0$ je dvojnásobným kořenem předešlé rovnice (r = 2), má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = A_0 x^2}$

c.) $P_k(x) = x^2 + 1$, $k = 2$, $b = -3$. Protože číslo $b = -3$ je jednoduchým kořenem předešlé rovnice (r = 1), má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)xe^{-3x}}$

4.2.23 Určete tvar partikulárního řešení rovnice

$$y''' + y' = f(x),$$

jestliže

a.) $f(x) = (x-1)^2$

b.) $f(x) = x \sin x$

c.) $f(x) = 2\cos(3x)$

d.) $f(x) = x^3 e^x \sin x$

Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^3 + \lambda = 0$ homogenní diferenciální rovnice $y''' + y' = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.

a.) $P_k(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, $k = 2$, $b = 0$. Protože číslo $b = 0$ je jednoduchým kořenem předešlé rovnice (r = 1), má partikulární řešení původní rovnice tvar:

$\underline{v(x) = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)x}$

b.) funkce *f* je imaginární částí funkce $g(x) = xe^{ix} = x(\cos x + i \sin x)$, je tedy $P_k(x) = x$, $k = 1$, $b = i$. Protože číslo $b = i$ je jednoduchým kořenem předešlé rovnice (r = 1), má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = \mathrm{Im}\left[(A_0 + A_1 x)xe^{ix}\right]}$

c.) funkce *f* je reálnou částí funkce $g(x) = 2e^{3ix} = 2[\cos(3x) + i\sin(3x)]$, je tedy $P_k(x) = 2$, $k = 0$, $b = 3i$. Protože číslo $b = 3i$ není kořenem předešlé rovnice, má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = \mathrm{Re}\left(A_0 e^{3ix}\right)}$

d.) funkce *f* je imaginární částí funkce $g(x) = x^3 e^{(1+i)x} = x^3 e^x(\cos x + i \sin x)$, je tedy $P_k(x) = x^3$, $k = 3$, $b = 1 + i$. Protože číslo $b = 1 + i$ není kořenem předešlé rovnice, má partikulární řešení původní rovnice tvar: $\underline{v(x) = \mathrm{Im}\left[(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3)e^{(1+i)x}\right]}$

4.2.24 Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 9y = 5e^{2x}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 9 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $y'' - 9y = 0$ je reprezentován funkcemi

$u_1(x) = e^{3x}$, $u_2(x) = e^{-3x}$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Protože $P_k(x) = 5$, $k = 0$, $b = 2$, přičemž číslo $b = 2$ není kořenem zadané rovnice, má partikulární řešení rovnice tvar $v(x) = A_0 e^{2x}$, $x \in R$. Dosazením $v(x)$ za y a $v''(x)$ za y'' do zadané rovnice dostaneme podmínku pro konstantu A_0, aby funkce v byla řešením zadané rovnice: $4A_0 e^{2x} - 9A_0 e^{2x} = 5e^{2x}$, $x \in R$.

Musí tedy platit $-5A_0 = 5$ a tedy $A_0 = -1$.

Obecným řešením zadané rovnice je funkce $\underline{u(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x}}$, $x \in R$

8. Určete obecné řešení diferenciální rovnice
$$y''-9y=\sin(2x).$$

Fundamentální systém řešení rovnice $y''-9y=0$ je reprezentován funkcemi byl určen v předešlé úloze, kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. Pravá strana zadané rovnice je imaginární částí funkce $g(x)=e^{2ix}=\cos(2x)+i\sin(2x)$.

Je tedy $P_k(x)=1$, $k=0$, $b=2i$, přičemž číslo $b = 2i$ není kořenem charakteristické rovnice.

Partikulární řešení rovnice má tvar $v(x)=\operatorname{Im}\left(A_0e^{2ix}\right)$.

Nejdříve tedy určíme partikulární řešení z rovnice $y''-9y=e^{2ix}$.

Dosadíme-li $z=A_0e^{2ix}$ za y a $z''=-4e^{2ix}$ za y'' do této rovnice, dostaneme podmínku pro konstantu A_0: $-4A_0e^{2ix}-9A_0e^{2ix}=e^{2ix}$.

Musí tedy platit $-13A_0=1$ a tedy $A_0=-\frac{1}{13}$.

Partikulární řešení v zadané rovnice má pak tvar
$$v(x)=\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{13}e^{2ix}\right)=\operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{13}\left[\cos(2x)+i\sin(2x)\right]\right\}=-\frac{1}{13}\sin(2x)$$

Obecným řešením zadané rovnice je funkce $\underline{u(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{13}\sin(2x),\ x\in R}$

4.2.25 Určete obecné řešení diferenciální rovnice
$$y''-4y=3x^3e^x.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^2-4=0$ má kořeny $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $y''-4y=0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x)=e^{2x}$, $u_2(x)=e^{-2x}$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

Protože $P_k(x)=3x^3$, $k=3$, $b=1$, přičemž číslo $b = 1$ není kořenem charakteristické rovnice, má partikulární řešení rovnice tvar $v(x)=(A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3)e^x$.

Dále je

$$v'(x)=(A_1+2A_2x+3A_3x^2+A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3)e^x,$$
$$v''(x)=\left[A_0+2A_1+2A_2+(A_1+4A_2+6A_3)x+(A_2+6A_3)x^2+A_3x^3\right]e^x$$

Po dosazení do zadané rovnice a po porovnání koeficientů u členů x^je^x , $j=0,1,2,3$ na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic pro konstanty A_0 , A_1 , A_2 ,A_3 :

$$\begin{array}{l|rrrrl}
e^x & -3A_0 & +2A_1 & +2A_2 & & =0\\
xe^x & & -3A_1 & +4A_2 & +6A_3 & =0\\
x^2e^x & & & -3A_2 & +6A_3 & =0\\
x^3e^x & & & & -3A_3 & =3
\end{array}$$

Řešením této soustavy rovnic je čtveřice čísel $A_0=-\frac{40}{9}$, $A_1=-\frac{14}{3}$, $A_2=-2$, $A_3=-1$

Obecným řešením zadané rovnice je funkce
$u(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\left(\frac{40}{9}+\frac{14}{3}x+2x^2+x^3\right)e^x$, $x\in R$

4.2.26 Určete obecné řešení diferenciální rovnice
$$y''+2y'+2y=3e^{-x}\cos x\,.$$
Řešení:

Charakteristická rovnice $\lambda^2+2\lambda+2=0$ má kořeny $\lambda_1=-1+i$, $\lambda_2=-1-i$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $y''+2y'+2y=0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x)=e^{-x}\cos x$, $u_2(x)=e^{-x}\sin x$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$.
Pravá strana zadané rovnice je reálnou částí funkce $g(x)=3e^{(-1+i)x}=3e^{-x}(\cos x+i\sin x)$.
Nejdříve tedy určíme partikulární řešení *z* rovnice: $y''+2y'+2y=3e^{(-1+i)x}$.
Protože $P_k(x)=3$, $k=0$, $b=-1+i$, přičemž číslo b = *-1+i* je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (r = 1), má partikulární řešení rovnice tvar $z(x)=A_0xe^{(-1+i)x}$.
Dále je
$z'(x)=[(-1+i)x+1]A_0e^{(-1+i)x}$,
$z''(x)=[(-1+i)^2x+2(-1+i)]A_0e^{(-1+i)x}$
Po dosazení do předešlé rovnice a po úpravě dostaneme rovnici : $2iA_0e^{(-1+i)x}=3e^{(-1+i)x}$ a je tedy $A_0=\frac{3}{2i}=-\frac{3}{2}i$ a funkce $z(x)=-\frac{3}{2}ixe^{(-1+i)x}$ je partikulárním řešením předešlé rovnice na intervalu $(-\infty,+\infty)$.
Partikulárním řešením zadané rovnice je pak funkce
$v(x)=\mathrm{Re}\left[-\frac{3}{2}ixe^{(-1+i)x}\right]=\mathrm{Re}\left[-\frac{3}{2}xe^{-x}(-\sin x+i\cos x)\right]=\frac{3}{2}xe^{-x}\sin x$
Obecným řešením zadané rovnice je funkce
$u(x)=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{2}xe^{-x}\sin x$, $x\in R$

4.2.27 Řešte Cauchyovu úlohu pro rovnici
$$y''+16y=1$$
při počátečních podmínkách $y(0)=\frac{1}{8}$, $y'(0)=\frac{1}{4}$.
Řešení:
Nejdříve určíme obecné řešení této rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^2+16=0$ má kořeny $\lambda_1=4i$, $\lambda_2=-4i$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $y''+16y=0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x)=\cos(4x)$, $u_2(x)=\sin(4x)$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$.
Protože $P_k(x)=1$, $k=0$, $b=0$, přičemž číslo b =*0* není kořenem charakteristické rovnice,má partikulární řešení rovnice tvar $v(x)=A_0$.

Po dosazení do zadané rovnice snadno zjistíme, že $A_0 = \dfrac{1}{16}$. Obecným řešením zadané rovnice je funkce $u(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \dfrac{1}{16}$. Konstanty C_1 , C_2 určíme pomocí daných počátečních podmínek:

$$u(0) = C_1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$u'(0) = -4C_1 \sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)\Big|_{x=0} = 4C_2 = \frac{1}{4}$$

Je tedy $C_1 = \dfrac{1}{16}$, $C_2 = \dfrac{1}{16}$. Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce

$$\underline{z(x) = \frac{1}{16}\left[\cos(4x) + \sin(4x) + 1\right]} \ , \ x \in R$$

4.2.28 Určete řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici

$$y'' + y = \cos(2x)$$

při počátečních podmínkách $y(0) = \dfrac{2}{3}$, $y'(0) = 0$.

Řešení:

Nejdříve určíme obecné řešení této rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ je reprezentován funkcemi $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \sin x$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Pravá strana zadané rovnice je reálnou částí funkce $g(x) = e^{2xi} = \cos(2x) + i\sin(2x)$.

Nejdříve určíme partikulární řešení *z(x)* rovnice $y'' + y = e^{2xi}$.

Protože $P_k(x) = 1$, $k = 0$, $b = 2i$, přičemž číslo $b = 2i$ není kořenem charakteristické rovnice,má partikulární řešení rovnice tvar $z(x) = A_0 e^{2xi}$.

Dále je $z'(x) = 2iA_0 e^{2xi}$, $z''(x) = -4A_0 e^{2xi}$.

Po dosazení do výše uvedené rovnice dostaneme podmínku pro konstantu A_0 :

$-4A\, e^{2xi} + A_0 e^{2xi} = e^{2xi}$, tedy $A_0 = -\dfrac{1}{3}$ a platí : $z(x) = -\dfrac{1}{3} e^{2xi}$.

Partikulární řešení zadané rovnice má tvar $v(x) = \mathrm{Re}\left(-\dfrac{1}{3} e^{2xi}\right) = -\dfrac{1}{3}\cos(2x)$.

Obecným řešením zadané rovnice je funkce $u(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{3}\cos(2x)$, $x \in R$.

Konstanty C_1 , C_2 určíme pomocí daných počátečních podmínek:

$$u(0) = C_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$u'(0) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\sin(2x)\Bigg|_{x=0} = C_2 = 0$$

Řešením dané Cauchyovy úlohy je funkce $\underline{w(x) = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos(2x)}$, $x \in R$

4.2.29 Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''+y=\cos(2x)\,.$$

<u>*Řešení:*</u>

Fundamentální systém řešení homogenní rovnice $y''+y=0$ jsme určili v předešlém příkladě; charakteristická rovnice $\lambda^2+1=0$ má kořeny $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$.

Pravá strana zadané rovnice má tvar $f(x)=e^{ax}\left[M_p(x)\cos bx+N_q(x)\sin bx\right]$,

kde $a=0,\ b=2,\ M_p(x)=1,\ N_q(x)=0,\ p=0,\ q=0$.

Protože číslo $2i$ není kořenem charakteristické rovnice, má partikulární řešení zadané rovnice tvar: $v(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$.

Dále je

$v'(x)=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$

$v''(x)=-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)$

Po dosazení do zadané rovnice dostaneme $-3A\cos(2x)-3B\sin(2x)=\cos(2x)$,

musí tedy být $-3A=1$ a $-3B=0$.

Funkce $v(x)=-\frac{1}{3}\cos(2x)$ je tedy partikulárním řešením zadané rovnice a obecným řešením je

funkce $\underline{u(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos(2x)}$, $x\in R$.

4.2.30 Určete tvar vynucených kmitů mechanického systému, který je popsán lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$\ddot{x}+\omega^2x=F_0\cos(\Omega t),$$

kde $\omega>0$ je frekvence vlastních kmitů systému, F_0 je amplituda budící harmonické síly a Ω je její frekvence.

<u>*Řešení:*</u>

Charakteristická rovnice $\lambda^2+\omega^2=0$ má kořeny $\lambda_1=\omega\, i$, $\lambda_2=-\omega\, i$.

Vynucené kmity jsou popsány partikulárním řešením zadané rovnice, které má tvar

$v(t)=A\cos(\Omega t)-\Omega^2B\sin(\Omega t)$,jestliže $\omega\neq\Omega$.

Po dosazení v a $\ddot{v}=-\Omega^2A\cos(\Omega t)-\Omega^2B\sin(\Omega t)$ do zadané rovnice za x a $\ddot{x}$ dostaneme rovnici: $A(\omega^2-\Omega^2)\cos(\Omega t)+B(\omega^2-\Omega^2)\sin(\Omega t)=F_0\cos(\Omega t)$, musí tedy platit:

$A=\dfrac{F_0}{\omega^2-\Omega^2}$, $B=0$.

Jestliže frekvence ω vlastních kmitů se nerovná frekvenci Ω, budící harmonické síly, jsou vynucené kmity daného systému popsány funkcí $\underline{v(t)=\dfrac{F_0}{\omega^2-\Omega^2}\cos(\Omega t)}$, $t\in R$.

Jsou-li frekvence vlastních kmitů a budící síly stejné (systém je v rezonanci), má partikulární řešení zadané rovnice tvar $u(t)=\left[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right]t$, neboť číslo ωi je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice.

Dále je

$\dot{u}(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)+\left[\omega B\cos(\omega t)-\omega A\sin(\omega t)\right]t$

$\ddot{u}(t)=-2A\omega\sin(\omega t)+2B\omega\cos(\omega t)-\left[\omega^2B\sin(\omega t)+\omega^2A\cos(\omega t)\right]t$

Po dosazení do zadané rovnice dostaneme: $-2A\omega\sin(\omega t)+2B\cos(\omega t)=F_0\cos(\omega t)$.

Musí tedy být $A=0$, $B=\dfrac{F_0}{2\omega}$

Je-li mechanický systém, který je popsán zadanou rovnicí, v rezonanci ,jsou vynucené kmity popsány funkcí $\underline{u(t)=\dfrac{F_0}{2\omega}t\sin(\omega t)}$, $t\in R$.

Všimněte si, že v případě, že $\omega\neq\Omega$, jsou vynucené kmity periodické; v případě, že $\omega=\Omega$, jsou neperiodické a amplituda neomezeně roste s rostoucími hodnotami proměnné t.

4.2.31 Netlumený pohyb hmotného bodu je popsán diferenciální rovnicí

$$\ddot{x}+4x=\sin t+\sin(3t)$$

a počátečními podmínkami $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$. Určete tvar výsledných kmitů.

Řešení:

Je třeba najít řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici. Nejdříve určíme obecné řešení této rovnice, které je superpozicí obecného řešení homogenní rovnice $\ddot{x}+4x=0$ (vlastních kmitů systému) a partikulárních řešení v_1 ,v_2 rovnic $\ddot{x}+4x=\sin t$, $\ddot{x}+4x=2\sin(3t)$ (vynucených kmitů).

Charakteristická rovnice $\lambda^2+4=0$ má kořeny $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$. Fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $\ddot{x}+4x=0$ je reprezentován funkcemi $u_1(t)=\cos(2t)$, $u_2(t)=\sin(2t)$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

Nyní určíme partikulární řešení v_1 rovnice $\ddot{x}+4x=\sin t$.

Řešení hledáme ve tvaru $v_1(t)=A\sin t+B\cos t$, dále je

$\dot{v}_1(t)=A\cos t-B\sin t$, $\ddot{v}(t)=-A\sin t-B\cos t$. Po dosazení do výše uvedené rovnice dostaneme rovnici: $3A\sin t+3B\cos t=\sin t$, tedy platí: $A=\dfrac{1}{3}$ $B=0$ a $v_1(t)=\dfrac{1}{3}\sin t$

Podobně určíme řešení $v_2(t)=-\dfrac{2}{5}\sin(3t)$ rovnice $\ddot{x}+4x=2\sin(3t)$.

Obecným řešením zadané rovnice je funkce

$u(t)=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)+\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{2}{5}\sin(3t)$ $,t\in R$.

Konstanty C_1, C_2 určíme z daných počátečních podmínek:

$u(0)=C_1=0$

$\dot{u}(0)=2C_2+\dfrac{1}{3}-\dfrac{6}{5}=0$

Je tedy $C_1=0$, $C_2=\dfrac{13}{30}$ a výsledné kmity jsou určeny funkcí

$\underline{w(t)=\dfrac{13}{30}\sin(2t)+\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{2}{5}\sin(3t)}$, $t\in\langle 0,+\infty)$

4.2.32 Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''-5y'=3x^2+\cos(5x).$$

Řešení:

Obecným řešením zadané rovnice je funkce $u(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+v_1(x)+v_2(x)$, kde funkce u_1, u_2 tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice $y''-5y'=0$, funkce v_1 je partikulárním řešením rovnice $y''-5y'=3x^2$ a funkce v_2 je partikulárním řešením rovnice $y''-5y'=\cos(5x)$.

Charakteristická rovnice $\lambda^2-5\lambda=0$ má kořeny $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$.

Funkce $u_1(x)=1$ $u_2(x)=e^{5x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y''-5y'=0$ na intervalu $(-\infty,+\infty)$.

Uvažujme nyní rovnici $y''-5y'=3x^2$.

Partikulární řešení v_1 této rovnice má tvar $v_1(x)=x\left(A_0+A_1x+A_2x^2\right)$

Dále je

$v_1'(x)=A_0+2A_1x+3A_2x^2$

$v_1''(x)=2A_1+6A_2x$

Po dosazení do výše uvedené rovnice dostaneme $-15A_2x^2+(6A_2-10A_1)x+2A_1-5A_0=3x^2$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic pro konstanty A_0 , A_1 , A_2 :

$$\begin{array}{l|llll}
x^2 & -15A_2 & & & =3 \\
x^1 & 6A_2 & -10A_1 & & =0 \\
x^0 & & 2A_1 & -5A_0 & =0
\end{array}$$

Řešením této soustavy rovnic je trojice čísel $A_0=-\dfrac{6}{125}$, $A_1=-\dfrac{3}{25}$, $A_2=-\dfrac{1}{5}$.

Funkce $v_1(x)=-\dfrac{1}{5}x^3-\dfrac{3}{25}x^2-\dfrac{6}{125}x$ je hledaným partikulárním řešením.

Dále určíme partikulární řešení rovnice $y''-5y'=\cos(5x)$

Řešení v_2 hledáme ve tvaru $v_2(x)=A\cos(5x)+B\sin(5x)$.

Dále je

$v_2'(x)=-5A\sin(5x)+5B\cos(5x)$

$v_2''(x)=-25A\cos(5x)-25B\sin(5x)$

Po dosazení do výše uvedené rovnice dostaneme

$-25(A+B)\cos(5x)+25(A-B)\sin(5x)=\cos(5x)$. Musí tedy platit:

$A+B=-\dfrac{1}{25}$

$A-B=0$

Řešením této soustavy rovnic je dvojice čísel $A=-\dfrac{1}{50}$, $B=-\dfrac{1}{50}$

Funkce $v_2(x)=-\dfrac{1}{50}\left[\cos(5x)+\sin(5x)\right]$ je hledaným partikulárním řešením.

Funkce $v(x) = v_1(x) + v_2(x) = -\frac{1}{5}\left(x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right) - \frac{1}{50}\left[\cos(5x) + \sin(5x)\right]$, $x \in R$ je hledaným partikulárním řešením zadané rovnice.

Obecným řešením zadané rovnice je funkce určená rovnicí

$$u(x) = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{1}{5}\left(x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right) - \frac{1}{50}\left[\cos(5x) + \sin(5x)\right] \text{ , } x \in R \text{ ,}$$

kde C_1 , C_2 jsou konstanty.