4.2 Řešení diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty

A) DR bez pravé strany

4.2.33 Integrujte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Řešení: Do rovnice dosadíme

$$y = e^{\lambda x}, y' = \alpha e^{\lambda x}, y'' = \alpha^2 e^{\lambda x}$$

a po úpravě obdržíme rovnici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

jejíž kořeny jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.
Obecný integrál rovnice je

$$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.}$$

4.2.34 Řešte rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -2$. Obecné řešení pak je

$$\underline{y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.}$$

4.2.35 Řešte rovnici

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $-1 \pm 2i$.
Daná rovnice má reálná řešení

$$\underline{y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}.}$$

B) DR s pravou stranou

4.2.36 Řešte diferenciální rovnici

$$y''' - 2y' + 4y = xe^{-2x}.$$

Řešení: Rovnice bez pravé strany $y''' - 2y' + 4y = 0$ má charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou -2, $1+i$, $1-i$. Řešením rovnice bez pravé strany jsou funkce

$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^x \cos x$, $y_3 = e^x \sin x$,

které tvoří fundamentální systém. Obecné řešení rovnice bez pravé strany má tvar

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x.$$

Jedno řešení rovnice s pravou stranou můžeme psát ve tvaru

$$z(x) = e^{-2x} \int \frac{W_1}{W} dx + e^x \cos x \int \frac{W_2}{W} dx + e^x \sin x \int \frac{W_3}{W} dx,$$

kde

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \cos x & e^x \sin x \\ -2e^{-2x} & e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \\ 4e^{-2x} & -2e^x \sin x & 2e^x \cos x \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \cos x & e^x \sin x \\ 0 & e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \\ xe^{-2x} & -2e^x \sin x & 2e^x \cos x \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 & e^x \sin x \\ -2e^{-2x} & 0 & e^x(\sin x + \cos x) \\ 4e^{-2x} & xe^{-2x} & 2e^x \cos x \end{vmatrix}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \cos x & 0 \\ -2e^{-2x} & e^x(\cos x - \sin x) & 0 \\ 4e^{-2x} & -2e^x \sin x & xe^{-2x} \end{vmatrix}$$

Odtud

$$z(x) = \left(\frac{1}{20} x^2 + \frac{3}{50} x + \frac{13}{500} \right) e^{-2x}.$$

Obecné řešení rovnice s pravou stranou je

$$\underline{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos x + c_3 e^x \sin x + \left(\frac{1}{20} x^2 + \frac{3}{50} x + \frac{13}{500} \right) e^{-2x}.}$$